

## Ein genauer Blick auf die optische Hebung A closer look at apparent depth

Thomas Quick, Johannes Grebe-Ellis, Oliver Passon

Bergische Universität Wuppertal, Gaußstr. 20, 42119 Wuppertal, [grebe-ellis@uni-wuppertal.de](mailto:grebe-ellis@uni-wuppertal.de)  
(Eingegangen: 08.05.2015; angenommen: 10.07.2015)

### Kurzfassung

Die Frage, wo das gehobene Bild eines unter Wasser liegenden Objekts gesehen wird, beantworten Schulbücher und Lehrwerke der Optik mit unterschiedlichen und oft widersprüchlichen Darstellungen zum Phänomen der optischen Hebung. Geht man von einer punktförmigen Pupille aus, ergeben sich zwei Bildpunkte desselben Objektpunkts: Das Bild ist astigmatisch. Während das sagittale Bild senkrecht über dem Objektpunkt gesehen wird, sollte das meridionale Bild dem Beobachter gleichzeitig entgegengerückt erscheinen. Dies steht im Widerspruch zur monokularen Beobachtung. Nach einer kritischen Diskussion verschiedener Darstellungen und Lösungsansätze zum Problem der optischen Hebung wird ein Experiment vorgestellt, mit dem die Trennung der Bilder im Zentimeterbereich gelingt. Inwiefern die Bildhelligkeit eine bisher unberücksichtigte Eigenschaft der Bilder darstellt, wird abschließend zur Diskussion gestellt.

### Abstract

The question of the apparent position of objects placed inside water is a subject of controversy and finds conflicting answers in schoolbooks and textbooks of optics as well. Given a point-like pupil, one can geometrically construct two image points for the same object point, i. e. the image is astigmatic. While the sagittal image is seen lifted perpendicular, the meridional image appears moved towards the observer. However, this conflicts with the observation in monocular vision. We first scrutinize the existing work and proposed solutions to this problem before we turn to the presentation of an experiment which allows to resolve these two images in the range of several centimeters. We investigate a so far neglected feature which may help to distinguish between these images, namely their luminosity.

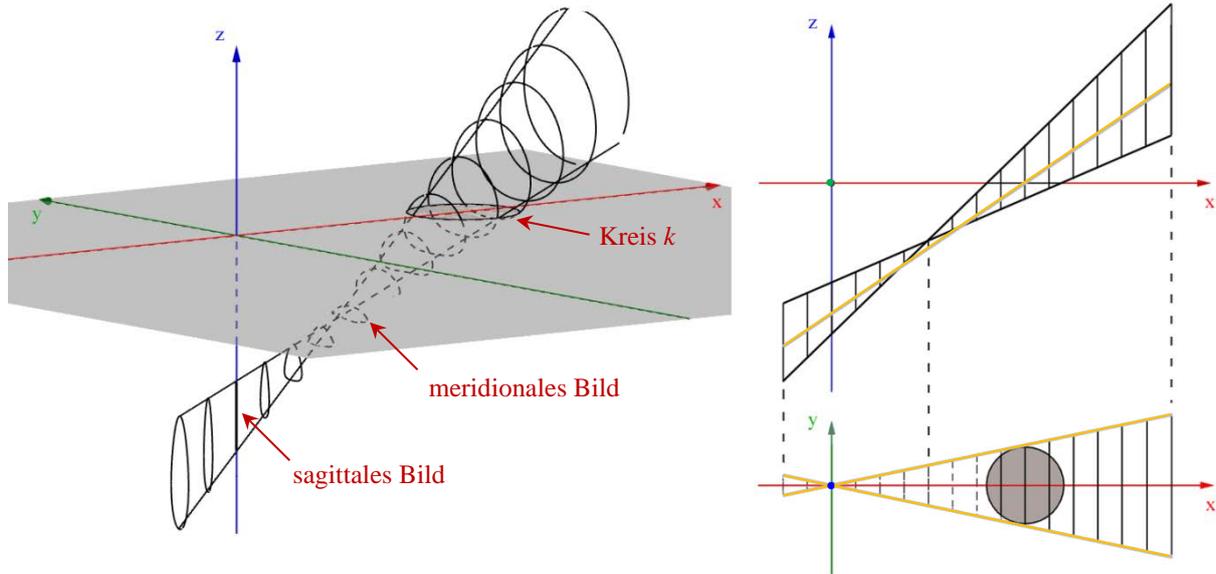
### 1. Einleitung

Objekte, die in optisch dichteren Medien wie Wasser gesehen werden, erscheinen lotrecht gegen die durchblickte Grenzfläche gehoben. Das Phänomen ist seit der Antike bekannt [1], es wird nach Goethe als optische *Hebung* bezeichnet [2] und im Optikunterricht in der Schule gern als Einstieg in die Refraktionsoptik genutzt (z. B. [3–5]). Diese handelt indessen nicht von optischer Hebung, sondern von Lichtbrechung, was im Wesentlichen historische Gründe hat. Wie *Hebung von Sicht* und *Brechung von Licht* als methodisch verschiedenartige aber gleichwertige, verallgemeinerbare Perspektiven auf den gleichen optischen Phänomenkomplex vermittelbar werden, ist in den vergangenen Jahren mehrfach diskutiert worden [6, 7]. Offen geblieben sind dabei einige grundlegende fachliche Fragen, deren Erörterung Gegenstand des vorliegenden Artikels ist. Sie beziehen sich auf die astigmatischen Bedingungen der Bildentstehung, die, wie das Beispiel in Abbildung 1 zeigt, bereits von einfachen Alltagsphänomenen zur Diskussion gestellt werden: Eine Tasse, deren Boden unserem Blick gerade nicht einsehbar ist, wird schluckweise mit Wasser gefüllt. Mit zunehmendem Füllstand wird der Tassenboden und mit ihm eine vorher verborgene Münze sichtbar,



Abb. 1: Je höher der Wasserstand, desto stärker erscheint die Münze gehoben.

die bei gefüllter Tasse schließlich ganz ins Blickfeld gehoben erscheint. Varianten dieses Versuchs, welche die dem Phänomen eigentümliche Entfremdung zwischen haptischer und optischer Erfahrung durch Optimierung der Anordnung und Einbettung in verschiedene Kontexte (Brunnen, Schwimmbad, Speerfischen, geknickte Paddel, Spaghetti etc.) abwandeln und verstärken, eröffnen ein reichhaltiges Feld an Phänomenen, das verschiedentlich dargestellt wurde [8–10]. Die sichere Beschreibung und Modellierung dieser Phänomene setzt voraus, dass sie sich zurückführen lassen auf die Beantwortung der Frage, die bereits dem Betrachter des Tassenversuchs mit der



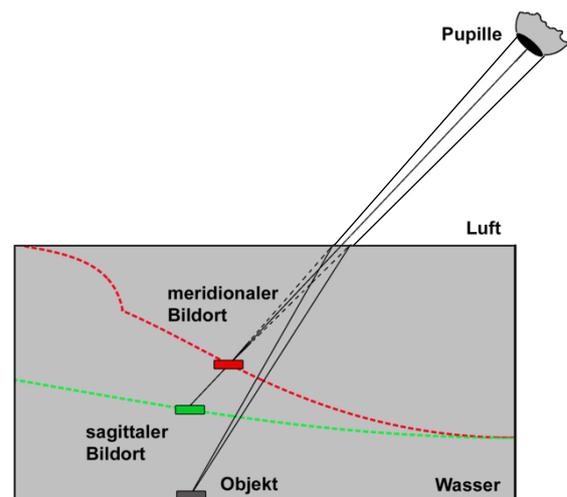
**Abb. 2:** Ein Strahlenbündel, das von einem Gegenstandspunkt auf der z-Achse (nicht eingetragen) unterhalb der Grenzfläche (x-y-Ebene) ausgeht, hüllt nach dem Durchgang durch die brechende Grenzfläche (Kreis  $k$ ) in rückwärtiger Verlängerung einen Bildkörper, das *Sturm'sche Konoid*, ein. Dieses besitzt zwei Einschnürungen: eine vertikale Brennlinie (sagittales Bild), die auf dem Lot zur Grenzfläche durch den Gegenstandspunkt liegt, und einen horizontalen Brennfleck (meridionales Bild), der dem Beobachter zusätzlich entgegengerückt ist.

Münze nahegelegt wird: An welchem geometrischen Ort im Raum wird die Münze gesehen?

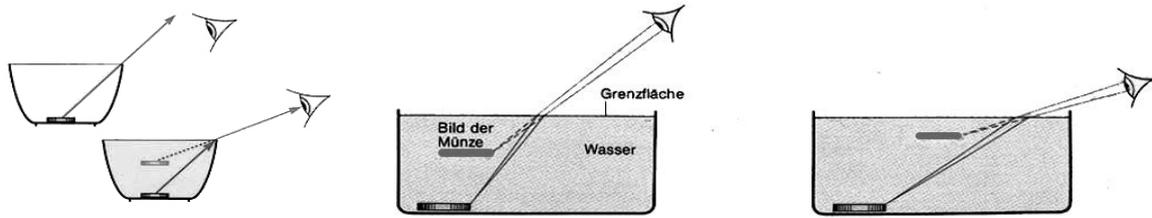
Obwohl es sich bei dieser Frage um ein vergleichsweise einfaches Problem handelt, dessen dokumentierte Analyse bis ins frühe 17. Jahrhundert zu Harriot, Snellius und Descartes zurückreicht, führt eine Sichtung der einschlägigen Fachliteratur zu der überraschenden Feststellung, dass die oben genannte Frage bis heute nicht abschließend beantwortet wurde. Die Prüfung verschiedener Lösungsansätze führt vielmehr zu einem widersprüchlichen Bild. So stehen zu der Frage, wo das virtuelle Bild beim *monokularen* Blick durch die ebene Grenzfläche gesehen wird, zwei Bilder zur Diskussion: das *sagittale* und das *meridionale* Bild. Den Hintergrund für diese Unterscheidung bilden die astigmatischen Eigenschaften der optischen Abbildung, die sich dadurch auszeichnen, dass das von einem Gegenstandspunkt ausgehende Lichtbündel beim Durchgang durch ein Abbildungssystem im Allgemeinen nicht auf einen *Bildpunkt*, sondern auf einen *Bildkörper* (*Sturm'sches Konoid*) abgebildet wird, der charakteristische Einschnürungen aufweist (Abb. 2). Diese werden mit Rücksicht auf ihre Lage zur Einfallsebene als *meridionale* (senkrecht) und *sagittale* (parallel) *Bildlinie* bezeichnet. Für die Abbildung eines Kreuzgitters bedeutet dies, dass die horizontalen Linien eine geringere Bildweite aufweisen als die vertikalen Linien. Bezieht man diese Verhältnisse auf die optische Hebung eines Gegenstandspunkts beim einäugigen Blick durch eine ebene Grenzfläche, dann erscheint das sagittale Bild lotrecht über dem Gegenstandspunkt, und das meridionale dem Betrachter entgegengerückt auf der zugehörigen Diakaustik.

Ersteres gibt die sagittale, letzteres die meridionale Hebungsrichtung an. In der Konsequenz ergeben sich zwei unterschiedliche optische Räume, die jeweils eine eigene Anordnung und Verzerrung optischer Ansichten fordern (vgl. Abb. 3).

Üblicherweise werden die beiden genannten Bildorte durch die Betrachtung meridionaler und sagittaler Randstrahlen und unter der Annahme einer punktförmigen Pupille gewonnen. Sie sind unabhängig



**Abb. 3:** Sagittaler und meridionaler Bildort. Die *sagittale Hebung* (grün) erfolgt senkrecht zur Grenzfläche, so dass die gesehene Münze über der tastbaren liegt. Bei der *meridionalen Hebung* (rot) rückt das Bild zusätzlich auf den Beobachter zu. Der gestrichelte Verlauf gibt die sagittale bzw. meridionale Kurvenform des Bodens an.



**Abb. 4:** Exemplarische Darstellungen der optischen Hebung. a) Das Bild der Münze erscheint lotrecht gegen die durchblickte Grenzfläche gehoben (sagittaler Bildort) [11]. b) Das Bild der Münze erfährt eine zusätzliche Verschiebung in Richtung des Auges (meridionaler Bildort). Je flacher der Blickwinkel, desto stärker die vertikale und laterale Verschiebung [12].

voneinander geometrisch korrekt ableitbar, unterscheiden sich jedoch hinsichtlich ihrer experimentellen Evidenz. Die Folgerung aus dem Modell der ausdehnungslosen Pupille, die ein gleichwertiges Erscheinen beider Bilder vorhersagt, deckt sich nicht mit den Beobachtungen, die mit dem einzelnen, unbewaffneten Auge unter normalen Beobachtungsbedingungen gemacht werden können. Hier erweist sich die Beobachtung des sagittalen, d. h. senkrecht gehobenen Bildes als zutreffend, während der konstruktiv bzw. rechnerisch ermittelte meridionale Bildort seine Beziehbarkeit auf konkrete Beobachtungen für den monokularen Fall schuldig bleibt. Die Frage nach der geometrischen Lage des gehobenen gesehenen Bildes führt damit auf einen Widerspruch zwischen Beobachtung und Theorie.

Die damit gekennzeichneten Unklarheiten tradieren in der Lehr- und Schulbuchliteratur Darstellungen, die mal das meridionale, mal das sagittale Bild als Lösung favorisieren. Abbildung 4 zeigt exemplarisch die beiden Varianten in verschiedenen Ausgaben des gleichen Schulbuchs [11, 12]. Die für das sagittale Bild angegebene qualitative Skizze (Abb. 4a) ist zwar korrekt, offen bleibt aber, worin der Vorzug gegenüber der meridionalen Hebung besteht, die hier unberücksichtigt bleibt. Im anderen Fall (Abb. 4b) wird die meridionale Hebung angegeben und die früher noch für richtig gehaltene sagittale Hebung ohne Angabe von Gründen vernachlässigt. Beide Darstellungen geben ferner keinen genaueren Aufschluss über die geometrische Konstruktion des jeweiligen Bildes als Schnittpunkt relativ zum Auge rückwärtig ins Medium hinein verlängerter Strahlen.

Zwischen den Schlussfolgerungen aus dem üblichen Modell der rückwärtigen Strahlverlängerung an der punktförmigen Pupille und den Beobachtungen, die mit dem einzelnen Auge gewonnen werden können, bestehen Widersprüche, die bisher nicht hinreichend aufgeklärt sind. Die Folge sind fehlerhafte Annahmen und widersprüchliche Darstellungen. Ferner führt die Thematisierung der optischen Hebung im Optikunterricht zu der unbefriedigenden Situation, dass durch die fehlende Passung zwischen den Beobachtungen zur senkrechten Hebung und dem Modell der punktförmigen Pupille das Modell seine Funktion als Erklärungsinstrument verliert.

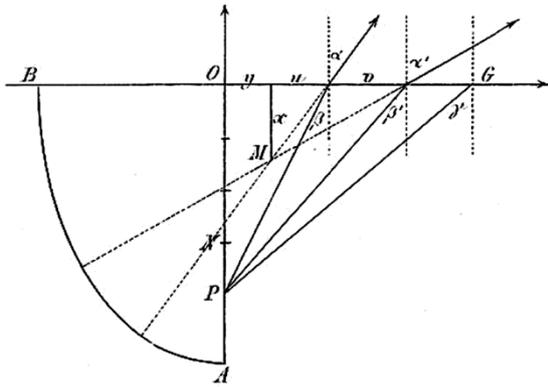
Der vorliegende Beitrag löst das Problem der optischen Hebung in vier Schritten:

1. Die in der Fachliteratur vorherrschenden Argumentationsfiguren werden exemplarisch vorgestellt und diskutiert.
2. Anschließend folgt eine theoretische Untersuchung zur Lage des gehobenen Bildes. Mit der Theorie des sagittalen und meridionalen Bildes wird der Widerspruch herausgearbeitet, der sich aus der vereinfachten Abbildungstheorie einer punktförmigen Pupille ergibt.
3. Es wird eine Reihe von Beobachtungen zu den Eigenschaften der optischen Hebung vorgestellt. Diese erfolgt unter normalen Beobachtungsbedingungen sagittal (binokular, aufrechte Kopfstellung). Es lassen sich indessen Versuche realisieren, in denen das sagittale *und* das meridionale Bild beobachtet werden können.
4. Der Widerspruch zwischen den Voraussagen des vereinfachten Modells und den Beobachtungen kann nicht aufgelöst werden, solange an der Annahme einer punktförmigen Pupille festgehalten wird. Im Rahmen der geometrischen Optik wird ein erweitertes Modell verwendet, das die abbildungsoptische Wirkung der gesamten Pupillenflechte berücksichtigt. Dies führt auf die *Bildhelligkeit* als bisher unberücksichtigte Bildeigenschaft. Der Helligkeitsunterschied von meridionalem und sagittalem Bild kann qualitativ im Experiment nachgewiesen werden.

## 2. Das Problem des gehobenen Bildes

### 2.1. Zur Struktur des Problems

1875 erschien in den *Annalen der Physik* eine Studie „Über den scheinbaren Ort eines in einem dichteren durchsichtigen Medium befindlichen [...] Lichtpunktes“, die exemplarisch die Schwierigkeiten bei der Beschreibung der optischen Hebung aufzeigt. Sie beginnt mit der Feststellung, „daß sehr viele größere und kleinere physikalische Lehrbücher ein noch weit härterer Tadel trifft, indem sie geradezu gänzlich unrichtigen Ansichten über die erwähnte scheinbare Ortsveränderung Vorschub leisten“ [13]. Zu diesen Ansichten gehört u. a. die unbegründete Annahme, die „Verschiebung geschehe nur in normaler Richtung“, so dass man „auf Grund dieser unrichtigen Voraussetzung“ zu einem ebenfalls „unrichtigen



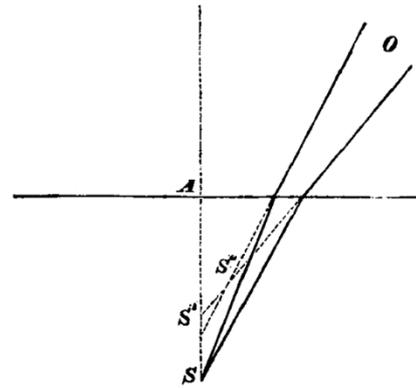
**Abb. 5:** Das Diagramm zur Entstehung des Hebungspunktes bei Bauer [13]. Die zwei von  $P$  ausgehenden Lichtwege treten unter den Winkeln  $\alpha$  und  $\alpha'$  aus der Grenzfläche aus und kreuzen sich in der rükwärtigen Verlängerung im Bildpunkt  $M$ .

Resultate“ gelange. Mit Verweis auf Abbildung 5 erläutert Bauer: „Schon der bloße Anblick der Figur lehrt, daß die scheinbare Ortsänderung sich aus einer verticalen und einer horizontalen Componente zusammensetzt, und daß nicht bloß die erstere, sondern auch die letztere eine Annäherung gegen das beobachtende Auge hin bewirkt“ [13].

Vor dem Hintergrund dieser Beobachtung werden die meridionalen Koordinaten des Bildortes und die Gleichung der diakaustischen Linie angegeben. An einer hohen „cylindrischen Glasschale“ könne man sich ferner von der „entwickelten scheinbaren Ortsveränderung experimentell überzeugen“, wobei „am besten das eine Auge geschlossen“ wird. Indem sich „das schauende Auge allmählich bis in die Ebene des Flüssigkeitsspiegels senkt“, bemerkt man „deutlich nicht bloß eine stets zunehmende verticale Erhebung, sondern gleichzeitig zunehmende Horizontalverschiebung des leuchtenden Punktes gegen das Auge hin“, „ganz wie die Theorie es verlangt“ [13].

Im nächsten Band der *Annalen* erscheint ein Nachtrag zu der Studie, in dem es nun vorsichtiger heißt, dass in der angegebenen Herleitung „nur solche Strahlen zur Entstehung des virtuellen Bildes beitragen, welche in eine durch den leuchtenden Punkt senkrecht zur Trennfläche der Medien gelegte Ebene fallen“ [14]. Mit Rücksicht auf Sturms Lehre von den Bedingungen der astigmatischen Abbildung scheint die Frage über „die wahre Lage des virtuellen Bildes“ eines unter Wasser liegenden Punktes nun „zwei verschiedene Antworten zu erheischen“. Der rükwärtig verlängerte Bildkörper ist nicht zentriert, sondern besitzt zwei Einschnürungen, das sagittale und meridionale Bild (Abb. 6).

Bauer räumt ein, dass er in seiner bisherigen Betrachtung das sagittale Bild unterschlagen hat. Dass beide Einschnürungen demselben Bildkörper angehören, veranlasst ihn abschließend zu der unerwarteten These: „In Wahrheit giebt es daher überhaupt kein eigentliches Bild des Punktes  $S''$ “ [14]. Obwohl



**Abb. 6:** Das korrigierte Diagramm von Bauer [14]. Neben dem auf den Beobachter hin verrückten (meridionalen) Bildpunkt  $S''$  ist zusätzlich der ausschließlich senkrecht gehobene (sagittale) Bildpunkt  $S'$  zu dem Objektpunkt  $S$  eingetragen.

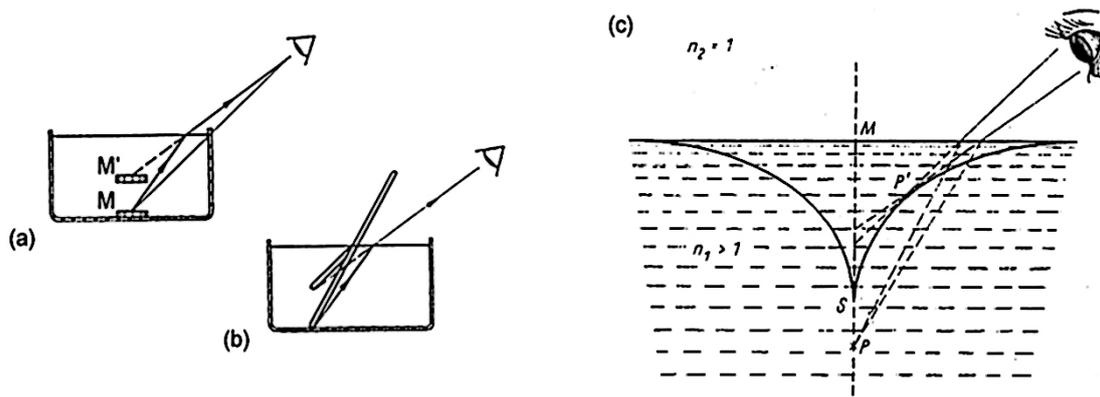
die Studie Bauers fast 140 Jahre alt ist, kennzeichnet seine Argumentation zur Lage des gehobenen Bildes Aspekte des Problems und Fehlerquellen, die bis in aktuelle Fachpublikationen zum Thema verfolgt werden können. In Bezug auf die fachliche Analyse des Problems beziehen wir uns im Folgenden hauptsächlich auf die Arbeiten von Nassar (1994) und Bartlett *et al.* (1984). Für ein Verständnis der historischen Genese des Problems der optischen Hebung stützen wir uns ferner auf Arvidsson (1938), Laird (1938) und Reese (1938). Im Folgenden werden drei Kategorien von Fehlerquellen diskutiert: (1) das Strahlendiagramm als konstruktives Beweismittel der Bildortbestimmung, (2) die Vermengung mono- und binokularer Konzepte und (3) die Interpretation experimenteller Daten.

## 2.2. Das Strahlendiagramm als konstruktives Beweismittel

In seiner Studie von 1994 folgt Nassar der Begründung Bauers, indem er die strahlenoptische Bildkonstruktion am Auge durch Rückwärtsschneiden der gebrochenen Strahlen in der Meridionalebene durchführt (Abb. 7) [15]. Als fehlerhaft weist er Darstellungen zurück, welche nicht nur für senkrechten, sondern auch für schrägen Einblick die Bedeutung des sagittalen Bildes geltend machen. Seine Analyse begründet er mit der Annahme, dass nur Strahlen in der Papierebene zur Bildentstehung beitragen. Die sich ergebende Konstruktion des virtuellen Bildes sei sowohl für den ein- als auch den zweiäugigen Blick gültig. Als Begründung wird die Entstehung der Bildpunkte auf der Retina durch die meridionalen Strahlen veranschaulicht. Der meridionale Bildpunkt bzw. die Diakaustik folgen aus dem mathematischen Übergang des gegen null gehenden Pupillendurchmessers. Experimentelle Belege bleibt Nassar schuldig.

Nassars Vorgehen ist kennzeichnend für die Mehrzahl fachlicher und fachdidaktischer Arbeiten zum Thema: Das Konstruktionsprinzip der rükwärtigen





**Abb. 8:** Beide Hebungsarten nebeneinander im selben Lehrbuch [20]. Münze a) und Stab b) unterliegen der sagittalen Hebung, d. h. der gesehene Bildpunkt liegt für alle Blickwinkel senkrecht über dem Objektpunkt. c) In der zugehörigen Bildkonstruktion wird dagegen die meridionale Hebung angegeben, bei welcher der Bildpunkt  $P'$ , abhängig von der Blickrichtung, auf der Diakaustik des Objektpunktes  $P$  liegt und damit zusätzlich dem Beobachter entgegengerückt [20].

dessen der konzeptionelle Übergang von der an einem Auge entwickelten astigmatischen Bildbeschreibung zum zweiäugigen Sehen begründen lässt, bleibt unklar.

#### 2.4. Die experimentelle Begründung

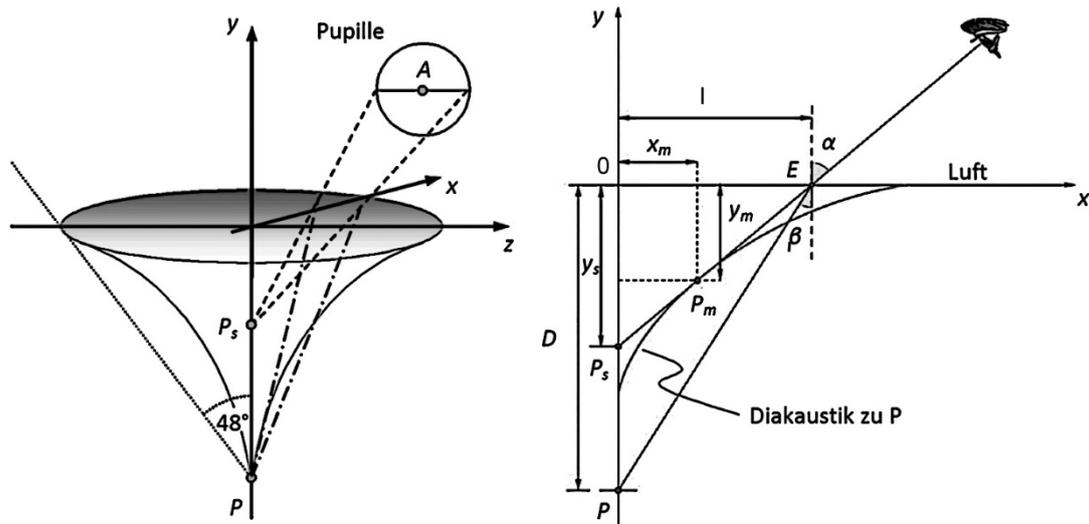
Ein Teil der Lösungsvorschläge zum Problem der optischen Hebung wird in der Literatur mit dem Hinweis auf experimentelle Beobachtungen verknüpft. Den Zweck, die rechnerisch oder geometrisch bestimmten Bildorte auch empirisch zu belegen, erfüllen die beschriebenen Beobachtungen mit unterschiedlichem Evidenzgrad. Im Folgenden diskutieren wir die wesentlichen Typen experimenteller Nachweise. Diese unterscheiden sich hauptsächlich dadurch, dass sie für den Fall monokularer Beobachtung entweder das sagittale oder das meridionale Bild nachzuweisen suchen. In den Fällen, in denen es den Autoren gelungen ist, mithilfe eines Mikroskops sagittales und meridionales Bild zu trennen und in Übereinstimmung mit der Theorie ihren Abstand zu vermessen, bleibt die Frage offen, ob diese Beobachtungen von der unbewaffneten einäugigen Beobachtung bestätigt werden können.

In seiner Stellungnahme zu der oben zitierten Begründung des meridionalen Bildes mithilfe des Strahlendiagramms von Laird [19] stellt Reese zunächst seine monokular ausgeführte Beobachtung des sagittalen Bildes zur Diskussion: „But there is more to this problem than at first appears, for it can be shown that the image of a fish, as it is usually perceived, is directly above the real fish, without any lateral displacement“ [23]. Er verweist auf ein einfaches aber überzeugendes Experiment, bei dem ein senkrecht in ein wassergefülltes Bassin eingetauchter Stab optisch mit dem Spiegelbild seines aus dem Wasser herausragenden Teils zur Deckung gebracht wird (vgl. auch [24]). Ähnlich argumentiert Buchholz [1], der gegen die Beobachtbarkeit des meridionalen Bildes folgende Beobachtung anführt (vgl. [25, 26]): „Das Gegenteil scheint richtig zu sein: Betrachtet man einen Fisch gleichzeitig durch die

Wasseroberfläche und die Frontscheibe eines Aquariums, so sieht man zwei virtuelle Bilder eines Fisches (...) Das Bild des Fisches, das man durch die Frontscheibe des Aquariums sieht, ist dem Betrachter um ca. 1/4 seiner Gegenstands Entfernung zur Frontscheibe näher gerückt (praktisch senkrechte Aufsicht auf das Wasser): Das Bild, das man durch die Wasseroberfläche sieht, müsste nach den üblichen [meridionalen, Anm. d. Verf.] Bildkonstruktionen (Diakaustik) wegen der schrägen Aufsicht dem Betrachter aber noch näher gerückt sein“ [1].

Ein weiterer Diskussionsbeitrag zu Laird stammt von Arvidson, dem die experimentelle Vermessung des Abstands zwischen meridionaler und sagittaler Bildweite mithilfe eines Mikroskops gelungen ist: „With the microscope in one position, vertical lines in the image will be sharp; in another position, horizontal lines will be sharp“ [27]. Eine ausführliche Reproduktion der Beobachtungen von Reese und Arvidson legen Bartlett *et al.* vor [22]. Ihre Überlegung, das horizontal bzw. vertikal orientierte Augenpaar als Modell einer Pupille anzunehmen und die unter dieser Annahme gewonnenen Beobachtungen auf den monokularen Fall zu übertragen, wurde bereits im letzten Abschnitt dargestellt. Inwiefern der Rückschluss auf den monokularen Fall nicht nur plausibel erscheint, sondern durch entsprechende monokulare Beobachtungen bestätigt und abgesichert werden kann, lassen die Autoren jedoch offen. Vergleichbare Betrachtungen liegen auch von Bartlett [28], Johnson [29], Kinsler [30] und Walker [31] vor.

Versuche, die monokulare Beobachtung des meridionalen Bildes nachzuweisen, stammen u. a. von Arizaga *et al.* [32] und Dittmann & Schneider [18]. Erstere führen Nassars theoretische Überlegungen weiter und beschreiben die Bildverformung ausgehnter Objekte in der Meridionalebene. Danach erscheinen Gegenstände zunehmend gestaucht und dem Beobachter entgegengerückt, je flacher dieser durch die Grenzfläche blickt. Als Nachweis werden



**Abb. 9:** Links: Schematische Darstellung zur Entstehung der Diakaustik zum Objektpunkt  $P$  für den Übergang von Wasser zu Luft. Das sagittale Bild folgt aus der rückwärtigen Verlängerung der zwei Randstrahlen, welche die maximale Querausdehnung der Pupille anzeigen (Mittelpunkt der Pupille  $A$  liegt in der  $x$ - $y$ -Ebene). Das meridionale Bild ergibt sich aus der Verlängerung der Strahlen für die Längsausdehnung der Pupille (nicht dargestellt). Rechts: Schematische Darstellung zur Konstruktion des meridionalen und sagittalen Bildes. Die Blicklinie durch  $E$  berührt die Diakaustik im meridionalen Bildpunkt  $P_m$  und schneidet das Lot durch den Objektpunkt  $P$  im sagittalen Bildpunkt  $P_s$ .

Fotos gezeigt, die allerdings wegen verschiedener störender Nebeneffekte und geringer Abbildungsqualität keine Aussage zugunsten des meridionalen Bildes gestatten. Dittmann & Schneider stellen in ihrem Beitrag ein Simulationsprogramm vor, das es gestattet, zu einem gegebenen Objektpunkt die vom Standort des Beobachters abhängigen Orte der meridionalen Bildpunkte zu bestimmen. Für die horizontale Verschiebung  $\Delta x_m$  des meridionalen Bildortes relativ zum tastbaren Ort des Gegenstands wird eine optische Messung angegeben. Dafür wird die horizontale Bodenkante eines mit Wasser gefüllten Aquariums unter geeigneten Beleuchtungsverhältnissen und unter sehr flachem Aufblickswinkel beobachtet. Um den Abstand  $\Delta x_m$  zu bestimmen, wird die Stelle der Seitenwand markiert, an der die zur Oberfläche gehoben erscheinende Bodenkante „scharf abgebildet“ wird [18]. Die Länge  $\Delta x_m$  ergibt sich dann aus dem Abstand dieser Stelle von der Aquarienrückwand. Im Anschluss diskutieren die Autoren den sagittalen Bildort. Schließlich wird die Beobachtung beschrieben, dass man das Auge zur wahlweisen Akkommodation auf die beiden Bildorte zwingen kann. Gleichwohl legt die Darstellung nahe anzunehmen, dass die monokulare Beobachtung üblicherweise meridional verläuft.

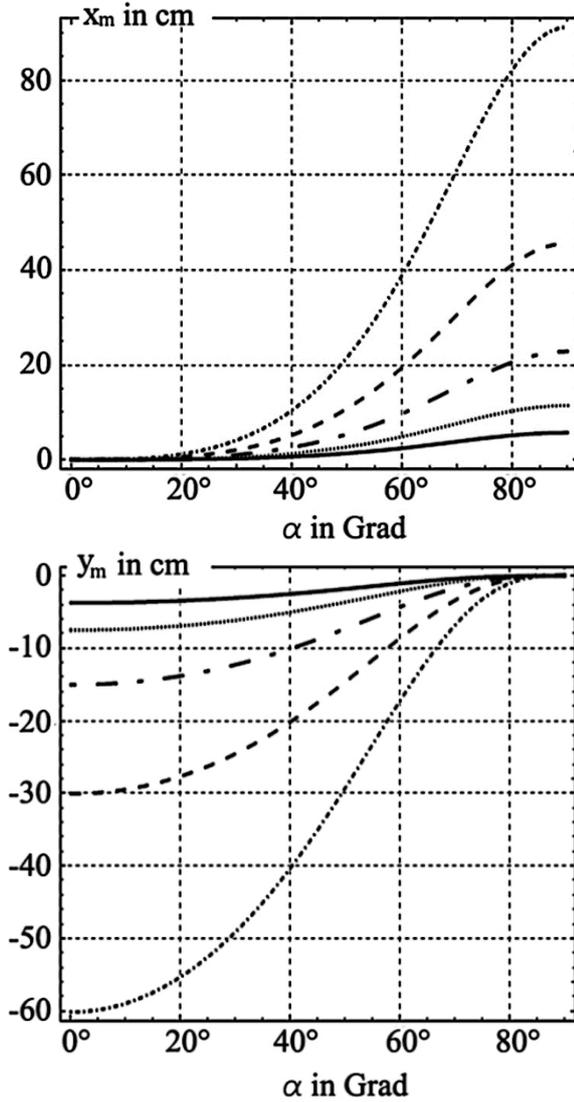
Eine abschließende Bewertung der experimentellen Befunde fällt schwer. Zweifelsfrei und übereinstimmend sind Beobachtungen, die für das zweiäugige Sehen beschrieben werden. Abhängig von der Orientierung des Augenpaares befindet sich das Bild des Gegenstandspunktes im Kreuzungspunkt oder in einem Punkt der größten Annäherung der beiden den Augen zugeordneten Sehlinien [33, 34]. Ebenso übereinstimmend sind qualitative und quantitative

Ergebnisse, die mit zusätzlichen optischen Hilfsmitteln wie etwa einem Mikroskop gewonnen wurden. Als widersprüchlich und zum Teil gegensätzlich erweisen sich Beobachtungen, die mit dem unbewaffneten, einzelnen Auge erzielt wurden. Entweder sprechen sich die Autoren für das sagittale oder das meridionale Bild aus, oder sie kommen zu dem Schluss, dass es keinen eindeutigen Ort für das gehoben gesehene Bild gibt.

### 3. Sagittales und meridionales Bild in der Theorie

Die strahlenoptische Behandlung der Frage nach dem Bildort eines unter Wasser liegenden Objektes beginnt mit der Betrachtung eines ausgewählten Objektpunktes unterhalb der Grenzfläche als sekundäre Lichtquelle. Das Feld der Strahlen, die von diesem Objektpunkt gegen die Grenzfläche laufen, wird durch die Bedingung der Totalreflexion begrenzt und durch einen Kegel angezeigt, dessen Spitze im Objektpunkt liegt und dessen Öffnungswinkel von der optischen Dichte des Mediums abhängt (für Wasser mit  $n_w = 1,33$  ist  $\alpha_{\text{Kegel}} = 2 \cdot \beta_{\text{Grenz}} \approx 96^\circ$ ). Die Gesamtheit der gebrochenen Strahlen ist erfüllt, wenn sie rückwärtig ins Medium hinein verlängert werden, ein Raumgebiet, das durch die an die Form einer Trompete erinnernde diakaustische Fläche eingehüllt wird. Insofern die rückwärtig verlängerten Strahlen die Richtungen angeben, unter denen der Objektpunkt dem Blick durch die Grenzfläche erscheint, entspricht das von der Diakaustik eingehüllte Raumgebiet dem Bildvolumen, in dem sich in jedem Punkt mindestens zwei rückwärtig verlängerte Strahlen schneiden (Abb. 9, links).

In das aus der Grenzfläche austretende Lichtfeld wird die Pupille eingefügt, die aus dem Feld der



**Abb. 10:** Die  $x_m$ - und  $y_m$ -Koordinaten in Abhängigkeit vom Blickwinkel  $\alpha$  für die Objektiefen  $D = 5, 10, 20, 40$  und  $80$  cm ( $n = 1,33$ ). *Oben:* Die Entwicklung der  $x_m$ -Komponente strebt einem Maximalwert bei  $\alpha = 90^\circ$  zu. *Unten:* Der Bildpunkt wandert für größer werdende Blickwinkel gegen die Grenzfläche.

rückwärtig verlängerten Strahlen die zur Bildkonstruktion beitragenden Strahlen herauschneidet. Die Ebene, die den Einblickpunkt  $E$ , den Gegenstandspunkt und den Mittelpunkt der Pupille  $A$  enthält und senkrecht auf der Grenzfläche steht, wird als *meridionale Hauptebene* bezeichnet. Senkrecht dazu und durch  $E$  und  $A$  verlaufend steht die *sagittale Hauptebene*.

### 3.1. Das meridionale Bild

Zwei von  $P(0, -D)$  ausgehende benachbarte Strahlen treffen relativ zum Einfallslot unter den Winkeln  $\beta$  und  $\beta'$  auf die Grenzfläche und erfahren nach dem Brechungsgesetz eine Ablenkung unter den nun größeren Winkeln  $\alpha$  und  $\alpha' = \alpha + \Delta\alpha$ . Der Schnittpunkt der beiden Geraden  $EA$  und  $E'A'$  konstituiert

für den Grenzfall  $\Delta\alpha \rightarrow 0$  den gesuchten meridionalen Bildpunkt  $P_m(x_m; y_m)$ . Die Gleichung der Geraden für  $EA$  ist von der Form  $y = mx + n$  mit dem Anstieg  $m = \tan(\pi/2 - \alpha) = \cot(\alpha)$ . Ist im gewählten Koordinatensystem  $l$  der Abstand von  $E$  zum Koordinatenursprung, so folgt aus der Geradengleichung wegen  $\tan(\beta) = l/D$  die Beziehung  $n = -ml = -\cot(\alpha)l = -D \tan(\beta)\cot(\alpha)$ . Die Gleichung von  $EA$  ist damit

$$y_{EA}(x) = [x - D \tan(\beta)\cot(\alpha)]. \quad \{1\}$$

Mit dem trigonometrischen Pythagoras folgt aus dem Brechungsgesetz an Luft

$$\begin{aligned} \tan(\beta) &= \frac{\sin(\beta)}{\sqrt{1 - \sin^2(\beta)}} \\ &= \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha)}}. \end{aligned} \quad \{2\}$$

Gleichung {1} wird mit dieser Beziehung zu

$$y_{EA}(x) = \left[ x - D \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha)}} \right]. \quad \{3\}$$

Analog folgt für die Gerade  $E'A'$  die Gleichung

$$\begin{aligned} y_{E'A'}(x) &= \\ &= \left[ x - D \frac{\sin(\alpha + \Delta\alpha)}{\sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha + \Delta\alpha)}} \right] \cot(\alpha + \Delta\alpha). \end{aligned} \quad \{4\}$$

Die  $x$ -Komponente  $x_m$  des Bildpunktes  $P_m$  ergibt sich aus  $y_{EA}(x) = y_{E'A'}(x)$  im Grenzfall  $\Delta\alpha \rightarrow 0$ . Für kleine Divergenzwinkel  $\Delta\alpha \ll 1$  wird die Ausdehnung der Pupille vernachlässigt und es kann von der Kleinwinkelnäherung Gebrauch gemacht werden. Es gilt dann einerseits  $\sin(\Delta\alpha) \approx \Delta\alpha$ , sowie  $\cos(\Delta\alpha) \approx 1$  und andererseits  $\cot(\Delta\alpha) \approx 1/\Delta\alpha$ . Daraus ergeben sich folgende Näherungen:

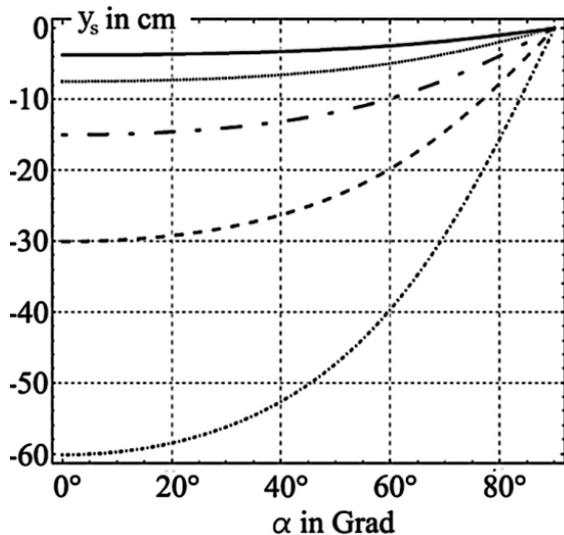
$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \Delta\alpha) &= \\ \sin(\alpha)\cos(\Delta\alpha) + \cos(\alpha)\sin(\Delta\alpha) &\approx \\ \sin(\alpha) + \Delta\alpha\cos(\alpha) \end{aligned} \quad \{5\}$$

sowie

$$\begin{aligned} \cot(\alpha + \Delta\alpha) &= \frac{\cot(\alpha)\cot(\Delta\alpha) - 1}{\cot(\Delta\alpha) + \cot(\alpha)} \approx \\ &= \frac{\cot(\alpha)\Delta\alpha}{1 + \Delta\alpha\cot(\alpha)}. \end{aligned} \quad \{6\}$$

Unter Verwendung dieser Näherungen ergeben sich mit den Gleichungen {3} und {4} und einer Grenzwertbetrachtung mittels der Regel von L'Hospital die beiden gesuchten Koordinaten zu

$$x_m = D \frac{(n^2 - 1)\sin^3(\alpha)}{(n^2 - \sin^2(\alpha))^{3/2}} \quad \{7\}$$



**Abb. 11:** Die  $y_s$ -Koordinaten in Abhängigkeit vom Blickwinkel  $\alpha$  für die gleichen Objektiefen  $D$  wie in Abbildung 10 ( $n = 1,33$ )

und

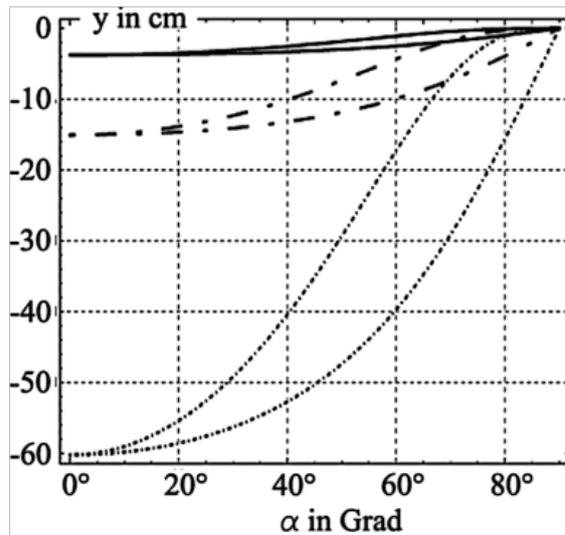
$$y_m = -D \frac{n^2 \cos^3(\alpha)}{(n^2 - \sin^2(\alpha))^{3/2}}. \quad \{8\}$$

Die Koordinaten des meridionalen Bildes werden zum Beispiel auch bei [15, 22, 35] angegeben. Abbildung 10 zeigt die Entwicklung der  $x_m$ - und  $y_m$ -Komponenten für die Objektiefen  $D = 5, 10, 20, 40$  und  $80$  cm bei zunehmendem Einblickwinkel  $\alpha$ . Die Funktion  $x_m(\alpha)$  zeigt einen Wechsel zwischen konvexem und konkavem Verlauf mit einer nur vom Medium abhängigen Wendestelle bei dem Einblickwinkel von ca.  $\alpha = 69^\circ$  für Wasser (Abb. 10, oben). Eine Grenzlage ergibt sich für  $\alpha \rightarrow 90^\circ$ . Das meridionale Bild rückt in  $x$ -Richtung daher maximal auf  $x = D/(n^2 - 1)^{1/2}$  gegen den Beobachter heran.

Die  $y_m$ -Komponente zeigt einen ähnlichen Verlauf, wobei die Wendestelle hier für Wasser bei etwa  $55^\circ$  liegt (Abb. 10, unten). Für den senkrechten Einblick entlang der optischen Achse wird  $\alpha = 0^\circ$  und damit  $y_m = -D/n$ . Der Ort des gesehenen Bildes liegt für den senkrechten Fall bei  $(0, -D/n)$ . Für größer werdende Einblickwinkel strebt die  $y$ -Komponente gegen null, so dass das gehobene Bild des Gegenstandspunktes gegen die Grenzfläche wandert.

### 3.2. Das sagittale Bild

Für das sagittale Bild werden aus dem von  $P$  ausgehenden Lichtbündel zwei Strahlen gewählt, die in der sagittalen Hauptebene liegen. Wie zuvor schließen die Strahlen einen kleinen Winkel  $\Delta\varphi$  ein. Der Winkel  $\alpha$ , unter dem die Strahlen aus der Grenzfläche austreten, ist aus Symmetriegründen für beide Strahlen gleich. Folglich befindet sich der Schnittpunkt  $P_s$  der rückwärtig verlängerten Strahlen auf dem Lot zur Grenzfläche durch  $P$ , d. h. senkrecht



**Abb. 12:** Für die drei Objektiefen  $D = 5, 20$  und  $80$  cm sind die  $y$ -Koordinaten des meridionalen und des sagittalen Bildes in Abhängigkeit vom Einblickwinkel  $\alpha$  gemeinsam dargestellt. Dabei liegt die  $y$ -Komponente des meridionalen Bildes für jeden Einblickwinkel über der des sagittalen Bildes ( $y_m > y_s$  für alle  $\alpha$ ). Für geringe Objektiefen wird der Unterschied zwischen beiden kontinuierlich kleiner.

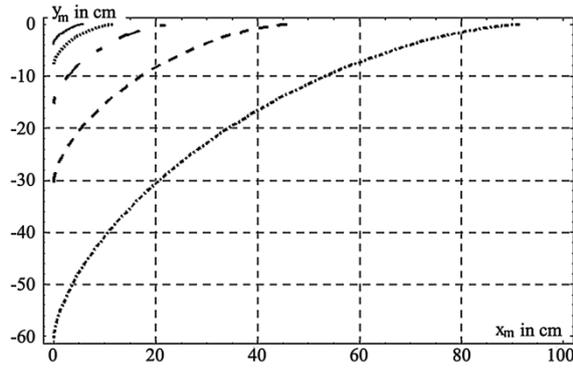
über dem Objektpunkt (Abb. 9, links). An dieser Stelle deutet sich bereits eine Asymmetrie bei der Bildkonstruktion von sagittalem und meridionalen Bild an, denn die Lage des Schnittpunktes  $P_s$  ist offensichtlich unabhängig vom Öffnungswinkel  $\Delta\varphi$ . Daher wird der Grenzübergang  $\Delta\varphi \rightarrow 0$  für eine zu vernachlässigende Querausdehnung der Pupille nur formal durchgeführt: An der Lage von  $P_s$  ändert dies nichts mehr. Die gesuchten Koordinaten lassen sich für einen gegebenen Winkel  $\alpha$  als Schnittpunkt der Geraden  $EA$  mit der optischen Achse ( $y$ -Achse,  $x = 0$ ) sofort aus Gleichung {3} angeben, wobei  $A$  zum Beispiel der Mittelpunkt der Pupille ist:

$$x_s = 0, \quad y_s = -D \frac{\cos(\alpha)}{(n^2 - \sin^2(\alpha))}. \quad \{9\}$$

Das sagittale Bild liegt stets senkrecht über dem Gegenstandspunkt. Nur die  $y$ -Komponente zeigt eine Abhängigkeit vom Einblickwinkel  $\alpha$  und wächst monoton zwischen  $y_s = -D/n$  bei  $\alpha = 0$  und  $y_s = 0$  für  $\alpha = 90^\circ$  (Abb. 11). Für den senkrechten Einblick ergibt sich ebenfalls der Punkt  $(0, -D/n)$ . Nur in diesem Fall fallen das meridionale und das sagittale Bild zusammen und sind ununterscheidbar. Aus Gründen der Symmetrie liegen beide Bilder für alle Einblickwinkel hintereinander, wobei sich das meridionale Bild stets vor dem sagittalen befindet. In Bezug auf die Komponenten gilt daher  $x_m > x_s$  und  $y_m > y_s$  für alle Winkel  $\alpha > 0^\circ$  (Abb. 12).

### 3.3. Die Diakaustik

Die rückwärts verlängerten Strahlen hüllen für variierende Winkel  $\alpha$  eine Kurve ein: die Diakaustik des



**Abb. 13:** Die Diakaustik eines Objektpunktes für die Objektiefen  $D = 5, 10, 20, 40$  und  $80$  cm ( $n = 1,33$ ).

Gegenstandspunktes  $P$ . Mathematisch entspricht die Diakaustik der Ortskurve der meridionalen Bildpunkte. Die Gleichung der Diakaustik folgt daher aus den Koordinaten {7} und {8}, indem der Winkelparameter  $\alpha$  zum Verschwinden gebracht wird. Dazu ist die Beobachtung hilfreich, dass die Koordinaten geschrieben werden können als

$$\left(\frac{x_m}{D}\right)^{2/3} = \frac{(n^2 - 1)^{2/3} \sin^2(\alpha)}{n^2 - \sin^2(\alpha)} \quad \{10\}$$

und

$$\left(\frac{y_m}{D}\right)^{2/3} = \frac{(n^2)^{2/3} \cos^2(\alpha)}{n^2 - \sin^2(\alpha)}. \quad \{11\}$$

Eine direkte Umformung der rechten Gleichung mittels des trigonometrischen Pythagoras und Einsetzen des linken Ausdrucks führt auf die Gleichung der Diakaustik:

$$\frac{y_m}{D} = -\frac{1}{n} \left[ 1 - (n^2 - 1)^{1/3} \left(\frac{x_m}{D}\right)^{2/3} \right]^{3/2}. \quad \{12\}$$

In Abbildung 13 sind einige diakaustische Linien für verschiedene Objektiefen  $D$  ausgezogen. Es handelt sich um eine monotone Kurve, deren Kuspen gemäß Konstruktion bei  $-D/n$  auf der  $y$ -Achse und bei  $x = D/(n^2 - 1)^{1/2}$  auf der  $x$ -Achse liegen. Für die ebene Grenzfläche sind alle durch {12} beschriebenen Diakaustiken *projektiv äquivalent*, d. h. durch Wahl eines geeigneten projektiven Koordinatensystems kann die Gleichung einer ersten Form auf die Form einer zweiten gebracht werden [36].

### 3.4. Der Abstand zwischen meridionalem und sagittalem Bild

Eine sich unmittelbar anschließende und für die experimentelle Beobachtung aufschlussreiche Fragestellung betrifft den geometrischen Abstand zwischen dem sagittalen und dem meridionalen Bild. Werden die Gleichungen {7}, {8} und {9} und dazu der Lehrsatz des Pythagoras verwendet, ergibt sich für den Abstand zwischen  $P_s$  und  $P_m$  die Beziehung

$$\overline{P_s P_m} = D \frac{(n^2 - 1) \sin^2(\alpha)}{(n^2 - \sin^2(\alpha))^{3/2}}. \quad \{13\}$$

Abbildung 17 zeigt für die Brechzahl von Wasser einige ausgezogene Kurven von {13} für variierende Tiefen  $D$  des Gegenstandspunktes. Die Funktion besitzt für  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  eine Wendestelle, die nur von der Brechzahl  $n$  abhängt, nicht aber von  $D$ . Für Wasser liegt diese Wendestelle bei  $\alpha = 68^\circ$ . Setzt man in diese Gleichung die für die freie einäugige Beobachtung leicht realisierbaren Werte von  $D = 30$  cm,  $n_{\text{Wasser}} = 1,33$  und  $\alpha = 45^\circ$  ein, ergibt sich für den besagten Abstand ein Wert von  $\overline{P_s P_m} = 8,07$  cm. Eine optische Distanz dieser Größenordnung liegt deutlich im akkommodativen Auflösungsvermögen des Auges.

### 3.5. Der Einfluss der Pupillenöffnung

Der Durchmesser der Pupille beträgt bei mittlerer Beleuchtung etwa 3 mm [37]. Damit liegt der physiologische Öffnungswinkel der Pupille in der Größenordnung von  $1^\circ$ , selbst wenn das Auge der Grenzfläche sehr nahekommt. Bei Fotoobjektiven vergrößert sich die numerische Apertur nur wenig auf ca.  $2^\circ$ . Für Objektive dieser Art können die gleichen Annahmen getroffen werden wie für die Pupille. Saxler widmet sich in seinem Beitrag dem Abbildungsfehler des meridionalen Bildes, der aus der endlichen begrenzten Pupillen- bzw. Blendenöffnung resultiert. Für den senkrechten Einblick, für den das meridionale und sagittale Bild zusammenfallen, berechnet er eine Gleichung für die Bildunschärfe  $\Delta y_B$  [16]:

$$r = \frac{(nH + D - n\Delta y_B) \sqrt{D^2 - (D - n\Delta y_B)^2}}{(D - n\Delta y_B) \sqrt{n^2 - 1}}. \quad \{14\}$$

Darin sind  $r$  der Radius der Blende bzw. der Pupille,  $H$  ihr Abstand von der Grenzfläche und  $D$  die Tiefe, in der sich der Objektpunkt befindet. Die Größe  $\Delta y_B$  ist ein Maß für die Abweichung von der punktzentrierten Abbildung des optischen Bildes, die sich aus der Annahme einer punktförmigen Apertur ergibt. Die Unschärfe liegt bei einer Pupillenöffnung von etwa 3 mm in der Größenordnung von  $10^{-5}$  und kann praktisch vernachlässigt werden.

Für einen Beobachter, der schräg zur ebenen Grenzfläche einen Punkt betrachtet, untersucht Saxler die Verteilung von Schnittpunkten, die sich aus Lichtwegen in der Meridionalebene ergeben. Die sich daraus ergebende Unschärfe liegt für alle Einblickwinkel in der gleichen Größenordnung von  $10^{-5}$ . Eine entsprechende Auswertung des sagittalen Bildes zeigt, dass die Abweichung nur um eine Ordnung wächst. Es kann vor diesem Hintergrund davon ausgegangen werden, dass sowohl das sagittale als auch das meridionale Bild scharf gesehen wird. Anders als bei der Pupille oder Blende einer Kamera können die numerischen Aperturwinkel  $\sigma$  bei Mikroskopen Werte von  $2\sigma = 140^\circ$  erreichen [37]. Dies ist

insbesondere bei der Bewertung von Beobachtungen zu berücksichtigen, die mit Mikroskopen gewonnen werden.

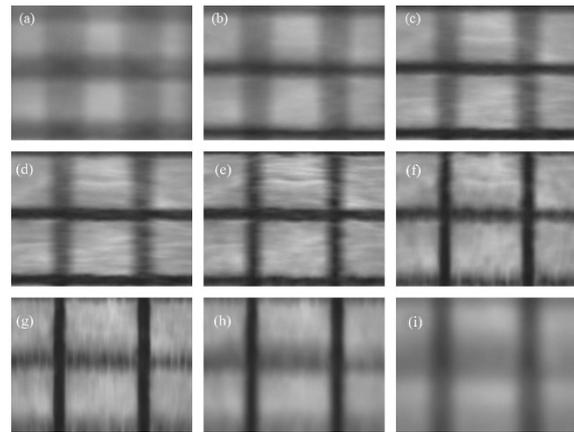
Aus den bisher dargestellten theoretischen Betrachtungen folgen die geometrischen Koordinaten des sagittalen und des meridionalen Bildes in Abhängigkeit von der Lage des Gegenstandspunkts, der optischen Dichte des Mediums und dem Standort des Beobachters. Beide Bilder gehen astigmatisch aus einem einzigen Objektpunkt hervor. Als zentral erweist sich die Diakaustik des Gegenstandspunkts, mit der die Hebungsbeziehungen an der ebenen Grenzfläche beschrieben werden. Die Unschärfe der Bildpunkte liegt ohne Zuhilfenahme optischer Instrumente und unter normalen Beobachtungsbedingungen außerhalb der physiologischen Wahrnehmung. Der Bildabstand kann aber im Zentimeterbereich liegen.

#### 4. Experimentelle Untersuchungen

Mit einem einfachen Versuch kann man sich von der Existenz der beiden Bildorte überzeugen. Unter das Tragglas eines Mikroskops wird ein Stück Millimeterpapier gelegt und das Mikroskop so ausgerichtet, dass die optische Achse des Tubus einen Winkel mit der Normalen zum Objektträger einschließt. Bei Mikroskopen, die nicht über eine schwenkbare Optik verfügen, kann statt des Tragglases auch ein kleines Keilprisma verwendet werden, um den schrägen Aufblick auf die Grenzfläche zu erreichen. Der Winkel, den das durchblickte Fenster des Prismas zur Auflagefläche einschließt, entspricht dann dem Winkel des Einblicks [24]. Es finden sich zwei Einstellungen, bei denen entweder die vertikalen Linien (tiefer liegende Position) oder die horizontalen Linien (höher liegende Position) des Millimeterpapiers scharf hervortreten (Abb. 14). Die Positionen der Scharfstellungen relativ zur Länge des durchblickten Mediums korrespondieren mit den geometrischen Orten des sagittalen und meridionalen Bildes.

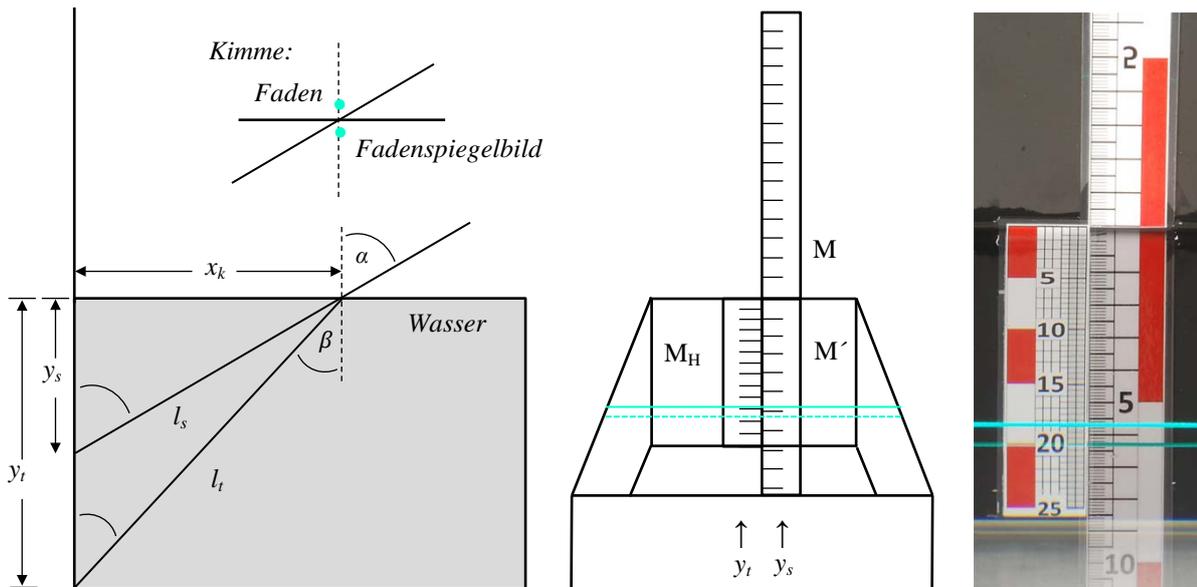
##### 4.1. Astigmatische „Schriftzeichen“

Die Bildserie in Abbildung 14 gestattet eine weitere Beobachtung: Das meridionale und das sagittale Bild zeigen unterschiedliche Kontraste. Die senkrechten Gitterlinien treten kontrastreicher als die horizontalen hervor (vgl. Abb. 14 (g) und (d)). Was bedeutet das? Die Beobachtung kann im größeren Maßstab am Wassertrog wiederholt werden (vgl. 4.3). An den Bildern in der Sagittal- und Meridionalebene wird die abbildungsoptische Wirkung der Grenzfläche sichtbar. Die Bilder gehen aus der optischen Transformation des Ausgangsbildes – in diesem Fall ein Kreuzgitter – hervor. Die Transformation ist durch die wirksame Geometrie und die Dichte des optischen Mediums bestimmt. Jeder Punkt des Kreuzgitters erfährt eine durch das optische Abbildungssystem vermittelte Verteilung der Bestrahlungsstärke in der Bildebene [38]. Die Zerstreung in einen Lichtfleck wird durch eine Verwaschungsfunktion beschrieben, die im Fall der ebenen Grenz-



**Abb. 14:** Zwischen Millimeterpapier und das Objektiv eines Mikroskops wird ein kleines Glasprisma geschoben. Die Bildreihe (a) bis (i) zeigt die Bildverwandlung bei Annäherung des Objektivs an das Prisma. Es gibt zwei Scharfeinstellungen: In der meridionalen Ebene treten horizontale Konturen (d), in der sagittalen Ebene vertikale

fläche gerade durch den Querschnitt des konoiden Bildkörpers gegeben ist. Das resultierende Bild kann folglich als Faltungsprodukt des Kreuzgitters mit dem durch die Abbildung wirksamen Querschnittsprofil des konoiden Bildkörpers betrachtet werden. Der Bildkontrast, der sich bei den Einstellungen auf die meridionale und sagittale Bildebene ergibt, gestattet insofern Rückschlüsse auf die Querschnittsform des Bildkörpers: Diese prägt sich dem Bild in ähnlichem Sinne auf, wie der Spitzenquerschnitt eines Stiftes dem Schriftbild beim Schreiben [39]. Im Falle des sagittalen Bildes (vertikale Bildlinie) sind die senkrechten Gitterlinien erwartungsgemäß kaum verschmiert, sondern zeigen einen scharfen Kontrast (Abb. 14 (g)), während die horizontalen Gitterlinien eine starke vertikale Verschmierung bzw. Kontrastverbreiterung aufweisen und damit die vertikale Ausdehnung der sagittalen Bildlinie sichtbar machen. Der Vergleich mit der Fokussierung in die meridionale Bildebene zeigt eine Vertauschung des Linienkontrasts. Allerdings lässt sich keine Einstellung des Mikroskops in der meridionalen Bildebene realisieren, welche die horizontalen Bildlinien mit ebenso hohem Linienkontrast liefert wie die vertikalen Linien in der sagittalen Bildebene. Daraus ergibt sich, dass der Querschnitt des konoiden Bildkörpers in der Meridionalebene nicht zu einer scharfen Bildlinie entartet; zwar weist er eine horizontale Streckung auf, besitzt jedoch zugleich eine endliche Vertikalausdehnung. Hier zeigt sich eine Asymmetrie, die auf einen noch näher zu untersuchenden Unterschied in den beiden Bildarten hindeutet. Aufgrund des großen Aperturwinkels bei Mikroskopen können die Bedingungen und Eigenschaften der astigmatischen Bildentstehung einfach und überzeugend demonstriert werden. Es bleibt indessen die Frage bestehen, in welcher Hinsicht solche Experimente mit dem monokularen Sehvorgang vergleichbar sind.



**Abb. 15:** Experiment zur Bestimmung der optischen Hebung von Wasser durch Vermessung eines hebungsbedingt gestauchten Maßstabs  $M_H$  mithilfe eines gespiegelten Maßstabs  $M'$  nach Althage [7, 24]. Über eine Kimme  $x_k$  werden für verschiedene Blickwinkel  $\alpha$  Wertepaare  $y_t, y_s$ , der gestauchten und der gespiegelten Skala abgelesen und damit das Verhältnis  $l_t:l_s = n$  als winkelunabhängiges Hebungsmaß bestimmt. Als Kimme dienen ein Faden, der wenige Millimeter über der Wasseroberfläche gespannt wird, und sein Spiegelbild. An einem Wassertrog mit einem Füllstand von 28 cm wurde mit  $x_k = 19,6$  cm und 10 verschiedenen Blickrichtungen das Hebungsmaß mit  $n = 1,329 \pm 0,001$  bestimmt. Die Maßstäbe sind auf einer Platte fixiert, die dreipunktgelagert in den Trog abgehängt und über eine Stellschraube justiert wird. Dass beide Maßstäbe exakt in der gleichen Ebene lotrecht zur Wasseroberfläche liegen, kann z. B. mit einem Kameraobjektiv überprüft werden. Dabei macht sich neben der Dispersion der Astigmatismus des gehobenen Maßstabs geltend: Die horizontalen Skalenteile von  $M_H$  werden stets vor denjenigen von  $M'$  scharf gesehen. Deshalb wurde  $M_H$  zusätzlich mit vertikalen Linien versehen bzw. empfiehlt sich für fotografische Aufnahmen die Arbeit mit einer Natriumdampfleuchte und großer Blendenzahl.

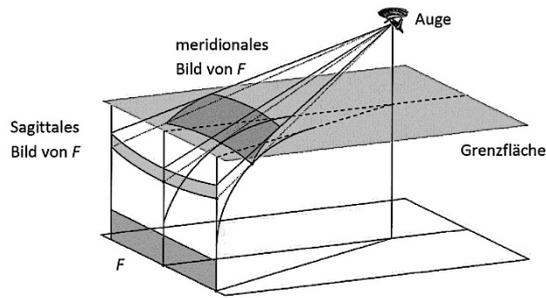
#### 4.2. Parallaxe, Akkommodation und Perspektive

Entfernte Gegenstände verändern ihre Position relativ zu einem bewegten Beobachter langsamer als näher liegende. Dieses in anderen Fällen bewährte Verfahren der parallaktischen Auflösung optischer Entfernungen bleibt gegenüber dem Abstand zwischen meridionalem und sagittalem Bild beim Einblick ins Wasserbassin unwirksam. Das Phänomen der optischen Hebung ist ja stets auf den jeweiligen Beobachterstandort bezogen und von diesem nicht ablösbar. Das bedeutet, dass die beiden Bilder für jeden Einblickpunkt hintereinander liegen. Eine Möglichkeit, die Ebene des sagittalen Bildes parallaktisch zu bestimmen, wird weiter unten genannt. Selbst durchgeführte Versuche, den Akkommodationsübergang zwischen meridionalem und sagittalem Bildort monokular zu realisieren, waren nicht erfolgreich, auch nicht in Situationen, in denen der Bildabstand  $P_s P_m$  nach Berechnung etwa 8 cm betragen sollte.

Einen Hinweis darauf, dass das monokulare Hebungsehen das sagittale Bild favorisiert, liefert das folgende auf Althage zurückgehende Experiment ([7, 24], vgl. auch [23]), das sich im Übrigen gut als Demonstrations- oder Praktikumsversuch zur Vermessung des Hebungsmaßes  $n$  für nichtsenkrechten

Einblick in den Wassertrog eignet (Abb. 15): Einem an der Seiteninnenwand eines gefüllten Wassertrogs befestigten und folglich gestaucht erscheinenden Maßstab  $M_H$  wird das Spiegelbild  $M'$  eines in vertikaler Verlängerung der Seitenwand fixierten Maßstabs  $M$  so überlagert, dass  $M'$  als optische Referenz für den gehobenen Maßstab  $M_H$  verwendet werden kann: Die Skalen des gehobenen und des gespiegelten Maßstabs liegen optisch in der gleichen Ebene und können deshalb gleichzeitig scharf gesehen werden. Für den senkrechten Einblick fallen meridionales und sagittales Bild zusammen. Man könnte vermuten, dass die Bilder für nicht senkrechte Einblicke *perspektivisch* getrennt werden könnten. Durch den Vergleich mit einem außerhalb des Mediums befindlichen Gegenstand könnte, so die Annahme, eine Entscheidung über die Art der Hebung gefällt werden.

Wie Abbildung 9 (links) veranschaulicht, liegen die Punkte  $P_s, P_m$  und  $A$  auf einer Geraden. In Bezug auf das Auge befindet sich der sagittale Bildpunkt  $P_s$  auf der gleichen Blicklinie hinter dem meridionalen Bildpunkt  $P_m$ . Die Verallgemeinerung für ausgedehnte Formen ist in Abbildung 16 schematisch für die Fläche  $F$  eines Rechtecks dargestellt. Werden die beiden Konstruktionsprinzipien punktweise auf die



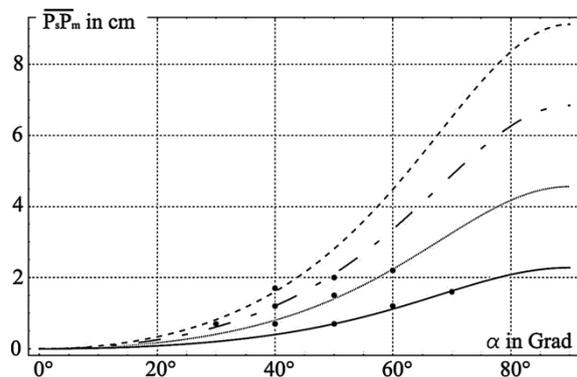
**Abb. 16:** Schematische Darstellung für den perspektivischen Vergleich von sagittalem und meridionalem Bild. Die Objektfläche  $F$  wird im sagittalen Fall senkrecht angehoben und gestaucht. Das meridionale Bild bildet eine Fläche im Raum, aber beide Flächen sind in das gleiche Volumen eingebettet.

Rechteckfläche angewendet, bildet die Gesamtheit der sagittalen (meridionalen) Bildpunkte das sagittale (meridionale) Bild von  $F$ . Die genannten Bilder sind Flächen im Raum. Das senkrecht gehobene Bild von  $F$  liegt in der gleichen Ebene wie das ursprüngliche Objekt  $F$ , ist aber zugleich gestaucht und zu den Seiten nach oben hin gekrümmt (Einblickwinkel für Punkte abseits der Blicklinie  $P_s A$  sind größer und die Hebung dort entsprechend stärker). Die Fläche des meridionalen Bildes liegt räumlich vor dem sagittalen Bild von  $F$  und ist nach der Konstruktion vollständig in das durch den Augpunkt  $A$  und das sagittale Bild von  $F$  aufgespannte Volumen eingebettet. Für das Auge als Projektionszentrum nehmen beide Bilder daher den gleichen Raumwinkel ein. Die perspektivisch gesehenen Größen des sagittalen und des meridionalen Bildes von  $F$  sind demnach identisch. Eine Entscheidung über die Lage des Bildes auf der Grundlage der perspektivischen Vergrößerung ist daher nicht möglich.

#### 4.3. Der Abstand zwischen den Bildern

Eine quantitative Untersuchung der Abstandsbeziehung {13} für die Untersuchung mit dem Mikroskop für verschiedene Objektiefen  $D$  und Einblickwinkel  $\alpha$  haben Bartlett *et al.* durchgeführt [22]. Die Abstände liegen im Millimeterbereich und damit deutlich unterhalb des akkommodativen Auflösungsvermögens des Auges. Wir haben den Versuch unter Bedingungen wiederholt, für die der Bildabstand im Zentimeterbereich liegt. Dazu wurde ein als Mikroskop wirkendes Linsensystem ( $f_{\text{Obj}} = 50$  mm und  $f_{\text{Ok}} = 80$  mm) auf laminiertes Millimeterpapier ausgerichtet, das an der senkrechten Innenwand des in Abbildung 15 dargestellten Wassertrogs angebracht war. Mit dem Mikroskop wurde dann unter verschiedenen Blickwinkeln das gehobene Bild einer kreisförmigen Markierung auf dem Millimeterpapier betrachtet. Variationen des Abstands zur anvisierten Markierung lieferten jeweils zwei Einstellungen, in denen entweder die vertikalen (entfernter) oder die horizontalen Linien des Millimeterpapiers hervortraten (Abb. 18).

Tiefe $Y$ (cm)	Winkel $\theta$ (Grad)	Gemessener Abstand (cm)	Berechneter Abstand (cm)	relative Messunsicherheit
2	70	$1,6 \pm 0,2$	1,6285	0,13
	60	$1,2 \pm 0,1$	1,1214	0,08
	50	$0,7 \pm 0,1$	0,7022	0,14
4	60	$2,2 \pm 0,1$	2,2428	0,05
	50	$1,5 \pm 0,1$	1,4043	0,07
	40	$0,7 \pm 0,1$	0,8050	0,14
6	50	$2,0 \pm 0,2$	2,1065	0,10
	40	$1,2 \pm 0,1$	1,2075	0,08
8	40	$1,7 \pm 0,1$	1,6100	0,06
	30	$0,7 \pm 0,1$	0,8215	0,14

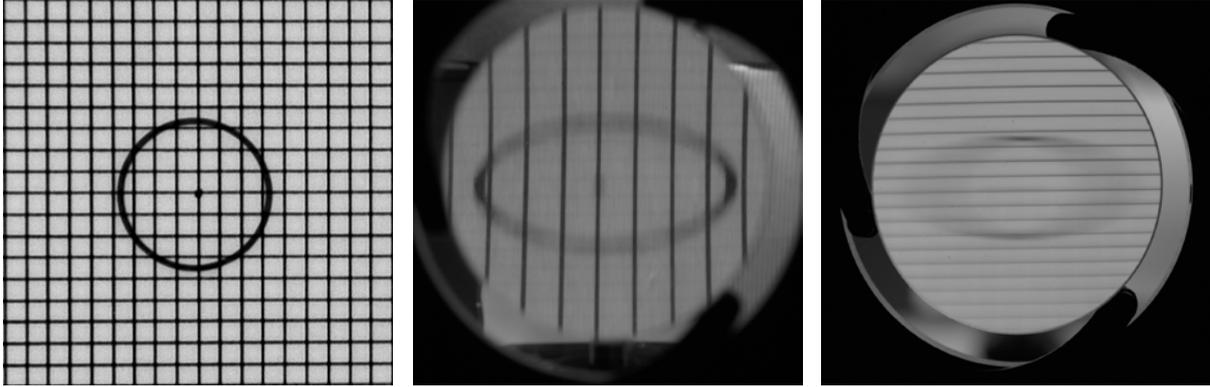


**Abb. 17:** *Oben:* Die gemessenen Abstände  $P_s P_m$  zwischen sagittalen und meridionalen Bildpunkten sind den theoretischen Werten nach Gleichung {13} gegenübergestellt. Die experimentelle Messunsicherheit ergibt sich aus einer Größtfehlerabschätzung. *Mitte:* Das Diagramm zeigt den Zusammenhang zwischen dem Abstand der Bildpunkte  $P_s P_m$  in Abhängigkeit vom Einblickwinkel  $\alpha$  für festgehaltene Objektiefen  $D$  ( $n = 1,33$ ).

Die Tabelle in Abbildung 17 stellt die Messwerte für verschiedene Einstellungen bzw. Objektiefen  $D$  den theoretischen Ergebnissen nach Gleichung {13} gegenüber. Die in das zugehörige Diagramm eingetragenen Messpunkte zeigen eine Passung für die gemessenen Abstände. Die Ergebnisse des Versuchs bestätigen die Abstandsbeziehung {13} im Rahmen der Messgenauigkeit. Sie machen zudem deutlich, dass die Bildpunkte unter üblichen Beobachtungsbedingungen merklich auseinanderfallen. Der Abstand liegt im akkommodativen Auflösungsvermögen.

#### 4.4. Das Bild auf der Diakaustik sichtbar machen

Die Frage nach den Bedingungen, unter denen nicht nur das sagittale Bild, sondern auch das meridionale Bild als Bestandteil der Diakaustik sichtbar gemacht werden kann, führt auf Beobachtungskriterien, die im Folgenden angegeben werden. Die Spur einer Kaustik kann beobachtet werden, wenn der Öffnungswinkel  $\varphi$  am Auge den kleinsten Winkel  $\eta$  überschreitet, den das Auge durch Beugungsbegrenzung noch auflösen kann. Als heuristische Forderung kann das Rayleigh-Kriterium herangezogen werden,



**Abb. 18:** Beobachtung und Messung des Abstands zwischen sagittalem und meridionalem Bild. Die Vorlage (*links*) besteht aus einem Strichgitter mit 2 mm Strichabstand und einer Kreismarkierung. Durch Verschieben des Mikroskops entlang der optischen Achse erhält man zwei Scharfeinstellungen: In der tiefer liegenden Position (Sagittalebene) werden vertikale Linien (*Mitte*), in der höher liegenden Position (Meridionalebene) horizontale Linien (*rechts*) scharf abgebildet. Die obigen Aufnahmen erfolgten in Natriumdampfbeleuchtung und mit Blende F8 bei einem Blickwinkel von  $\alpha = 62,5^\circ$ .

das bei Beleuchtung mit einer Wellenlänge  $\lambda$  und für eine kreisförmige Blende mit dem Durchmesser  $d$  eine Bedingung für den Winkelabstand  $\eta$  liefert, damit zwei Lichtquellen gerade als getrennt erkannt werden können [38]. Es gilt

$$\eta = 1,22 \frac{\lambda}{d} . \quad \{15\}$$

Um den Öffnungswinkel  $\varphi$  am Auge in Bezug auf die Kaustik abzuschätzen, sei  $h$  die Höhe zwischen den beiden Punkten auf der Kaustik, die durch die zwei als differentiell nah beieinander liegenden meridionalen Randstrahlen der Pupille gegeben sind. Dann kann  $h$  zu dem lokalen Krümmungsradius  $r$  der Kaustik und dem Öffnungswinkel  $\theta$  in Beziehung gesetzt werden [40]. Es gilt

$$h = \frac{dSd\theta}{2} = \frac{dS}{d\theta} \frac{d\theta^2}{2} = r \frac{d\theta^2}{2} . \quad \{16\}$$

Für die Winkelausdehnung  $\varphi$  der Länge  $h$  bezogen auf den Abstand  $g$  zum Auge ist  $\varphi = h/g$ . Der Pupillendurchmesser  $d$  ist im Allgemeinen groß gegenüber der Höhe  $h$ , so dass die Abschätzung  $d = h + gd\theta \approx gd\theta$  verwendet werden kann (Abb. 19). Damit ergibt sich zusammen mit den Gleichungen {15} und {16} für das Auflösungsvermögen  $\varphi/\eta$ :

$$\frac{\varphi}{\eta} = \frac{r}{2,44\lambda} \left( \frac{d}{g} \right)^3 . \quad \{17\}$$

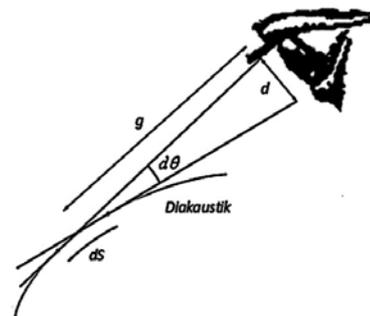
Der Krümmungsradius  $r$  einer einparametrischen Kurve ist allgemein durch die Beziehung

$$r(x) = \left( 1 + y'(x)^2 \right)^{3/2} \cdot y''(x)^{-1} \quad \{18\}$$

gegeben, wobei die zu untersuchende Funktion die Diakaustik mit der Gleichung {12} ist. Der Ausdruck für das Auflösungsvermögen {17} wird groß, wenn  $d$  ebenfalls groß und  $g$  möglichst klein gewählt wird. Der Nahpunkt (minimale Sehweite) variiert

altersbedingt zwischen 7-35 cm und liegt für eine Person mittleren Alters durchschnittlich bei  $g \approx 12$  cm [41]. Der Übergang vom photopischen (Tag) zum skotopischen Sehen (Nacht) ist mit einer Zunahme der Empfindlichkeit des Auges in Bezug auf die Umgebungshelligkeit und einer Anpassung des Pupillendurchmessers  $d$  verbunden. Die maximale Sagittal- und Meridionalausdehnung sind als Durchmesser  $d$  der kreisförmigen Eintrittsfläche der Pupille gleich groß. Er beträgt für das Tagessehen unter normalen Helligkeitsbedingungen ca. 3 mm. Bei starker Dunkeladaptation kann sich der Durchmesser auf bis zu 6-7 mm vergrößern [42].

Für die Beobachtung wurde hinter einem Block aus Plexiglas ( $n = 1,5$ ) eine kleine Blende ( $\varnothing \approx 0,5$  mm) angebracht und diese mit einer Natriumdampflampe homogen ausgeleuchtet. Der so erzeugte „Lichtpunkt“ befand sich in Bezug auf den Beobachter in einer Tiefe von  $D = 17,5$  cm. Abbildung 20 zeigt für diese Bedingungen und für den Nahpunkt ( $g = 12$  cm) einige Kurven zum Auflösungsvermögen  $\varphi/\eta$  in Abhängigkeit vom Einblickwinkel  $\alpha$  für verschiedene Pupillendurchmesser  $d$  zwischen Tag- und Nachtsehen. Der Krümmungsradius  $r$  hängt über die  $x$ -Komponente {7} der Diakaustik mit dem Einblick-

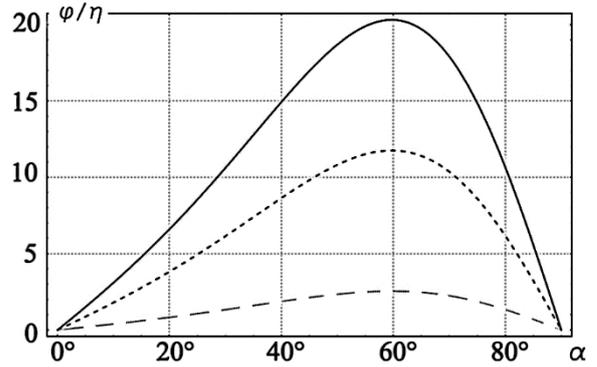


**Abb. 19:** Schematische Darstellung zum Auflösungsvermögen der Diakaustik [40]

winkel  $\alpha$  zusammen. Er kann daher direkt als Parameter verwendet werden. Im Übergang zur Dunkeladaption kann sich der Pupillendurchmesser um mehr als das Doppelte vergrößern, wodurch das Auflösungsvermögen um ein Vielfaches ansteigt. Zugleich hängt der Quotient  $\varphi/\eta$  vom Einblickwinkel  $\alpha$  ab und zeigt ein Maximum im Bereich von  $60^\circ$ . Bei vollständiger Dunkeladaption wird im Blick durch die ebene Grenzfläche das Bild der kleinen Lochblende als vertikales Brennlinienelement sichtbar. Eine vorurteilsfreie Entscheidung, ob sich vor dem sagittalen Bild noch ein weiteres – das meridionale Bild – befand, konnte jedoch von den Autoren nicht getroffen werden. Ein eindeutigeres Urteil ermöglicht die inverse Blendensituation, bei der ein schwarzer Punkt ( $\varnothing \approx 0,5$  mm) in eine helle Umgebung eingebettet wurde. Hier zerfällt das Kreisblendenbild tatsächlich in zwei unterschiedlich helle, hintereinander liegende Bilder.

**5. Das Kriterium der Bildhelligkeit**

Die Annahme der punktförmigen Pupille zur Konstruktion der Bildorte genügt offensichtlich nicht, um einem der beiden Bildorte einen Vorzug vor dem anderen zuzusprechen. Das vereinfachte Modell steht darüber hinaus im Widerspruch mit Beobachtungen, die dem sagittalen Bild eine Vorzugsstellung einräumen. Schärfer formuliert: Die Annahme einer punktförmigen Pupille ermöglicht keine eindeutige Aussage über die Lösung des Problems der Bildorte. Sie gibt nur eine Auskunft über die Richtung des gesehenen Bildes. Eine Lösung des Problems ergibt sich, wenn das Prinzip der rückwärtigen Strahlverlängerung auf den allgemeinen Fall einer ausgedehnten Pupille angewendet wird. Die geometrische

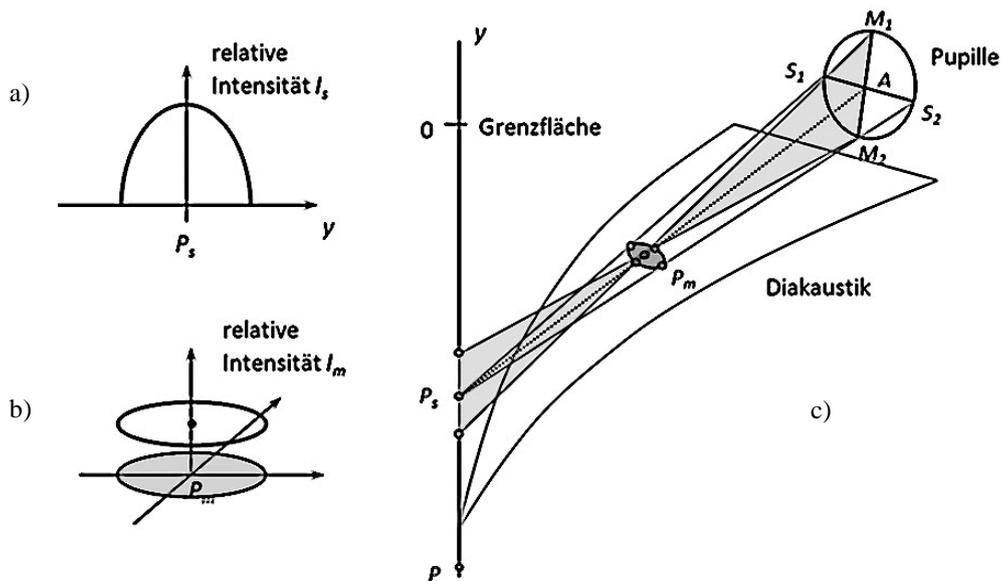


**Abb. 20:** Kaustiken sind beobachtbar, wenn  $\varphi$  den kleinsten Winkel  $h$  überschreitet, den das Auge auflösen kann. Bei Dunkeladaption wird das Auflösungsverhältnis  $\varphi/\eta$  groß. Die Kurven zeigen ein maximales Auflösungsvermögen bei ca.  $60^\circ$ . (Werte für folgende Pupillendurchmesser  $d$ : --- 3 mm, ..... 5 mm, — 6 mm). Für den Nahpunkt wird  $g = 12$  cm angenommen.

Konstruktion führt dann auf die Intensität bzw. Bildhelligkeit als Kriterium, um den sagittalen Bildort vor dem meridionalen auszuzeichnen.

**5.1. Ein erweitertes Modell**

Betrachtet wird das von  $P$  kegelförmig ausgehende Strahlenbündel. Jeder Strahl ist, nach dem Übergang an der Grenzfläche zwischen Wasser und Luft und anschließend rückwärtiger Verlängerung, Tangente an die Diakaustik zu  $P$ . Im Folgenden interessiert der Bildkörper, der durch diejenigen rückwärtig verlängerten Strahlen entsteht, die in die Querschnittsfläche der Pupille einfallen. Die Gesamtheit dieser rückwärtig verlängerten Strahlen hüllt einen geometrischen Körper ein, der zwei Einschnürungen



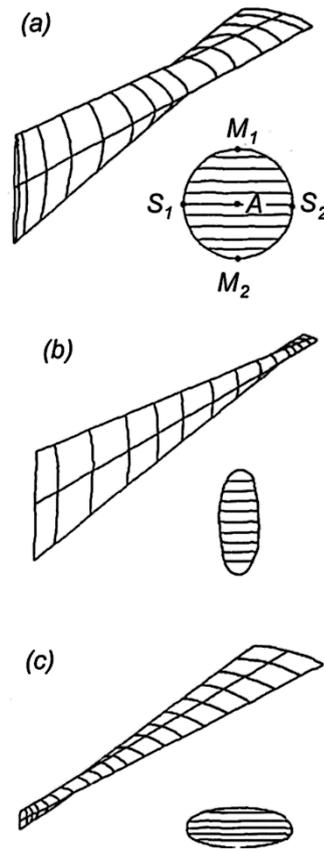
**Abb. 21:** a) Die Verteilung der Intensität über die Brennlinie des sagittalen Bildes. Ihr Maximum ist proportional zum Durchmesser der Pupille  $S_1S_2$  und fällt elliptisch nach beiden Seiten ab. b) Die Helligkeit für das meridionale Bild ist dagegen kontinuierlich über eine Fläche verteilt. c) Schematische Darstellung zur Konstruktion des meridionalen und sagittalen Bildes.

aufweist, die nicht punktförmig sind. Im Gegensatz zur vereinfachten Betrachtung, die für den Grenzübergang einer gegen null konvergierenden Pupillenausdehnung auf geometrische Bildpunkte führte, leiten sich die Eigenschaften der beiden Bilder im allgemeinen Fall aus der Anzahldichte der sie konstituierenden Strahlen ab.

Es seien  $S_1$  und  $S_2$  bzw.  $M_1$  und  $M_2$  Punkte auf der kreisförmig angenommenen Pupille. Sie zeigen die maximale sagittale bzw. meridionale Ausdehnung der Eintrittsluke an (Abb. 21 und 22).  $A$  sei deren Mittelpunkt, so dass die Punkte  $P_m$  und  $P_s$  einerseits die Zentren des allgemeinen, nicht mehr punktzentrierten sagittalen und meridionalen Bildes darstellen und zum anderen die entsprechenden sagittalen und meridionalen Koordinaten für den punktförmigen Grenzfall angeben.

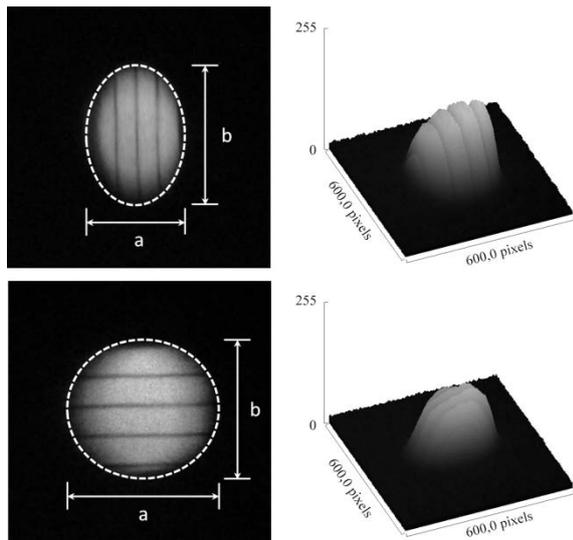
Für das sagittale Bild gilt: Strahlen, die jeweils in einer Ebene parallel zur Grenzfläche in die Pupille einfallen, schneiden sich in der rückwärtigen Verlängerung aus Symmetriegründen in einem Punkt, der senkrecht über dem Objektpunkt  $P$  liegt. So verlaufen z. B. alle Strahlen bezüglich der Strecke  $S_1S_2$  in der rückwärtigen Verlängerung durch  $P_s$ . Das sagittale Bild ist daher bei endlicher Ausdehnung der Pupille streng geometrisch eine (Brenn-)Linie, deren Länge durch die Meridionalausdehnung der Pupille bestimmt ist. Die Helligkeit eines Punktes auf dieser Brennlinie ist proportional zur Anzahldichte der Strahlen, die durch ihn verlaufen und damit proportional zur Sagittalausdehnung der Pupille. Für die maximale Sagittalausdehnung  $S_1S_2$  (Pupillendurchmesser  $d$ ) besitzt der Punkt  $P_s$  auf der Brennlinie die größte Bildhelligkeit. Insgesamt ergibt sich für die sagittale Brennlinie daher ein symmetrisches Intensitätsprofil, das elliptisch zu beiden Seiten abfällt und sein Maximum mit  $I_{max} \sim d$  in  $P_s$  besitzt.

Der meridionale Bildpunkt  $P_m$ , der sich aus dem Grenzübergang der Pupillenausdehnung gegen null ergibt, ist der Berührungspunkt an der Diakaustik für den rückwärtig verlängerten Strahl zum Pupillenmittelpunkt  $A$ . Wie sich leicht feststellen lässt, kann die Argumentation für das sagittale Bild nicht auf das meridionale Bild übertragen werden. Für zwei beliebige Strahlen, die vertikal in einer Meridionalebene der Pupille einfallen, ergibt sich wegen der unterschiedlichen Berührungspunkte mit der Diakaustik jeweils ein etwas anderer Schnittpunkt. Anders formuliert: Keine zwei beliebigen Paare von rückwärtig verlängerten Strahlen schneiden sich im gleichen Schnittpunkt. Nach dem Kriterium, wonach die Bildhelligkeit proportional zur Anzahldichte der durch den betreffenden Bildpunkt verlaufenden Strahlen ist, sollte das meridionale Bild lichtschwächer sein. Die konstante Bildhelligkeit ist proportional zum Quotienten aus der überstrichenen Fläche des meridionalen Bildes und der Eintrittsfläche der Pupille.



**Abb. 22:** Abhängigkeit des konoiden Bildkörpers von der Form der Pupille (aus [35]). a) Bei dem Bildkonoid der kreisförmigen Pupille dominiert die Intensität des sagittalen Bildes. b) Die maximale Bildhelligkeit des sagittalen Bildes nimmt ab, während die meridionale gleichfalls sinkt. Es findet eine Annäherung der Helligkeiten statt. c) Die größte Bildhelligkeit des sagittalen Bildes bleibt erhalten, während sie bei dem meridionalen Bild insgesamt weiter abnimmt. Der Unterschied zwischen den Intensitäten nimmt weiter zu.

Horváth & Varjú diskutieren, wie sich der Einfluss der Form der Pupille auf die Helligkeit des meridionalen und sagittalen Bildes geltend macht, wenn Abweichungen von der kreisförmigen Pupillenfläche auftreten [35]. Für eine Pupille, bei der die sagittale Ausdehnung verkleinert wird und die meridionale Länge dadurch dominiert, bleibt die maximale Intensität in  $P_s$  erhalten ( $M_1M_2 = d$ ), während die Brennlinie kürzer wird ( $S_1S_2 < d$ ). Die Pupillenfläche nimmt insgesamt ab und die relative Intensität des meridionalen Bildes sinkt im gleichen Verhältnis dazu ebenfalls (Abb. 22, b). Wird dagegen die meridionale gegenüber der sagittalen Pupillenausdehnung verringert, nimmt die maximale Bildhelligkeit in  $P_s$  bei gleichbleibender Größe der Bildlinie ab, da  $S_1S_2 = d$  konstant bleibt. Die Intensität des meridionalen Bildes fällt jedoch auf einen gleichmäßigen zur Pupillenfläche proportionalen Helligkeitswert ab (Abb. 22, c). Wird der Unterschied in der Bildhelligkeit für die erste Situation noch vergrößert, kann

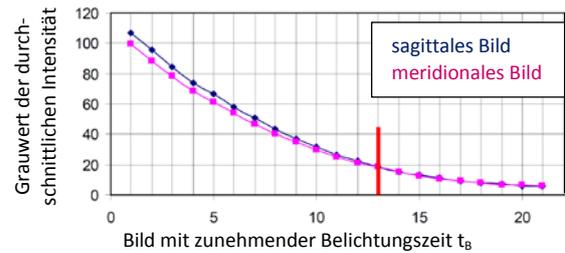


**Abb. 23:** Die elliptische Grundfläche  $A$  des sagittalen (oben) und meridionalen (unten) Bildes ergibt sich aus der jeweiligen großen und kleinen Halbachse. Daneben sind die zugehörigen Intensitätsprofile der Bilder, gemessen in Grauwerten. Ein Grauwert entspricht einem Tripel gleicher Werte im RGB-Farbraum und wird diskret mit 8 Bit pro Kanal angegeben, weshalb die Intensitäten insgesamt zwischen schwarz (0) und weiß (255) variieren.

es in der zweiten Situation zu einer Annäherung der Helligkeiten kommen, die dazu führt, dass die Dominanz des sagittalen Bildes verschwindet.

## 5.2. Eine experimentelle Entscheidung

Der vorhergesagte Helligkeitsunterschied zugunsten des sagittalen Bildes konnte im Experiment qualitativ nachgewiesen werden. Dazu wurde der Mikroskopversuch am Wassertrog variiert und die Ebene des Einblicks in die Horizontalebene verlegt. Hinter einem Block aus Plexiglas ( $n = 1,5$ ,  $D = 17,5$  cm) wurde ein Strichgitter ( $d = 3$  mm) mit einer Natrium dampflampe homogen ausgeleuchtet. Ein technisches Auge war unter einem Beobachtungswinkel von  $\alpha = 45^\circ$  ( $P_s P_m = 4,7$  cm) entlang der Blickrichtung verschiebbar. Die Aperturblende hielt den Öffnungswinkel und damit die einfallende Lichtmenge konstant. Mit dem abstandsfesten System, bestehend aus Achromat, Schirm und Kamera, wurde jeweils auf das sagittale und das meridionale Bild scharfgestellt und das Bild auf dem Schirm ab fotografiert. Die Fotos aus der Sagittal- bzw. Meridionalebene wurden mit einem Bildverarbeitungsprogramm ausgewertet. Für beide Bildeinstellungen wurde jeweils eine Bildserie mit abnehmender Belichtungszeit  $t_B$  aufgenommen. Zur Normierung wurde die durchschnittliche Intensität des sagittalen und meridionalen Gesamtbildes in der jeweiligen Abbildungsebene herangezogen (Abb. 23). Dieser einem bestimmten Grauwert zugeordnete durchschnittliche Intensitätswert gleicht sich mit abnehmender Belichtungszeit für beide Bildtypen an. Dadurch ist für die weitere Auswertung sichergestellt, dass für die in Betracht



$t_B$ in s	1/6	1/8	1/10	1/15	1/20	1/25	1/30	1/40	1/50
$k_M/k_S$	0,83	0,81	0,84	0,85	0,81	0,81	0,85	0,79	0,83

**Abb. 24:** Durchschnittliche Intensität des sagittalen und meridionalen Bildes für variable Belichtungszeiten.

Oben: Auswertung der Fotos mittels Bildanalyse. Unten: Das Verhältnis der  $k$ -Zahlen des sagittalen und des meridionalen Bildes.

kommenden Belichtungszeiten der Energiedurchsatz identisch ist. Gemäß der Prognose sollte der Unterschied zwischen den Bildern in der Intensitätsverteilung zum Ausdruck kommen. Als Vergleichsmaß kann die durchschnittliche Intensität  $I$  pro Gesamtfläche  $A$  verwendet werden. Definiert man die Zahl  $k = I/A$ , lässt sich die Verteilung über die Flächenausdehnung des Bildes bestimmen. Der Abbildungsmaßstab der optischen Anordnung ist aufgrund der abstandsvarianten Beziehungen zwischen Gegenstand, Optik und Schirm selbst konstant. Die Flächengröße  $A$  umfasste in jedem Bild jeweils diejenige Fläche, bei der eine signifikante Erhöhung der Intensität gegenüber der Untergrundbelichtung messbar war. Die Tabelle in Abbildung 24 zeigt die Messergebnisse für das Verhältnis der  $k$ -Zahlen des meridionalen ( $k_m$ ) und des sagittalen ( $k_s$ ) Bildes bei abnehmender Belichtungszeit  $t_B$ . Der Quotient der  $k$ -Zahlen für eine gegebene Belichtungszeit spiegelt das prozentuale Verhältnis der relativen Intensitäten der beiden Bilder wider. Der gemittelte Wert liefert unter Berücksichtigung einer Größtfehlerabschätzung  $k_m/k_s = 0,82 \pm 0,03$ .

Das vorliegende Ergebnis lässt sich so interpretieren, dass das sagittale Bild um etwa 20% heller ist als das meridionale Bild. Nach diesem Kriterium erfolgt die monokulare Beobachtung der optischen Hebung vornehmlich sagittal. Indessen handelt es sich um einen relativ geringen Helligkeitsunterschied, der sich verschiedentlich auf die Interpretation der Beobachtungen auswirken kann. Zum Beispiel könnte die geringe Helligkeitsdifferenz die Schwierigkeit einer zweifelsfreien experimentellen Beurteilung der Hebungsort unter normalen Bedingungen erklären.

## 6. Zusammenfassung

Auf die eingangs gestellte Frage, wo eine unter Wasser liegende Münze gesehen wird, lässt sich vor dem Hintergrund der vorgestellten Untersuchung eine eindeutige Antwort geben: Sie wird lotrecht über der tastbaren Münze gesehen, und zwar umso höher, je größer der zum Flächenlot gemessene Auf-

blickwinkel ist. Um zu diesem Ergebnis zu kommen reicht der Erklärungsansatz, der von einer punktförmigen Pupille ausgeht, allein nicht aus. Dieser führt vielmehr zu zwei gleichermaßen vertretbaren Standpunkten, die zwar jeder für sich betrachtet geometrisch plausibel erscheinen, aber keine gegenseitige Auszeichnung der beiden Hebungsrichtungen gestatten. Im Experiment lassen sich sagittales und meridionales Bild und ihre Abstandsbeziehung nachweisen; die entsprechenden Berechnungen stimmen mit den Messwerten im Rahmen der Messgenauigkeit gut überein. Im Unterschied dazu können für den Fall des monokularen Sehens ausschließlich Beobachtungen der senkrechten Hebung (sagittales Bild) bestätigt werden. Eine Separation von meridionalen und sagittalem Bild ohne optische Hilfsmittel, d. h. mit dem bloßen Auge, ist weder in eigenen Versuchen gelungen, noch in der uns bekannten Literatur belegt. Diese Tatsache mag ein Grund für die vielfach unterschiedlichen, widersprüchlichen und zum Teil falschen Darstellungen der optischen Hebung in der Fach- und Schulbuchliteratur sein. In der vorliegenden Untersuchung wurde mit der Bildhelligkeit ein bisher nicht berücksichtigtes Kriterium zur Unterscheidung von meridionalen und sagittalem Bild angegeben. Dieses ergibt sich, wenn man die Gesamtheit der für die ausgedehnte Pupille zu berücksichtigenden Strahlen betrachtet. Während das sagittale Bild die Form einer Brennlinie annimmt, liefert die Konstruktion für das meridionale Bild einen Brennfleck. Der damit verbundene Intensitätsunterschied stellt das sagittale gegenüber dem meridionalen Bild heraus.

Die hier geführte Diskussion betraf vor allem das monokulare Sehen. Geht man zum zweiäugigen Sehen über, so vereinfachen sich die Bedingungen erheblich, denn durch Akkommodation und Konvergenz der Augen sehen wir die Objekte beim Blick durch die optisch dichtere Grenzfläche an der Stelle, wo sich die Fixationsachsen kreuzen. Für ein parallel zur Grenzfläche liegendes Augenpaar schneiden sie sich am Ort des sagittalen Bildes. Für ein senkrecht zur Grenzfläche liegendes Augenpaar liegt der Schnittpunkt vor dem sagittalen Bild auf einer Diakustik. Davon kann sich jeder leicht selbst überzeugen: Beim Neigen des Kopfes rücken die Dinge auf den Beobachter zu.

## 7. Literatur

- [1] Lorch, R. (1985): Pseudo-Euclid on the Position of the Image in Reflection: Interpretations by an Anonymous Commentator, by Pena, and by Kepler. In: North, J. D.; Roche, J. J. (Hg.) (1985): *The Light of Nature: Essays in the History and Philosophy of Science Presented to A. C. Crombie*. Dordrecht/ Boston/ Lancaster: Martinus Nijhoff, S. 135-144
- [2] Goethe, J. W. von (1810): Zur Farbenlehre. In: Steiner, R. (Hg.) (1982): *J. W. von Goethe: Naturwissenschaftliche Schriften*. 3. Band. Dornach: Rudolf Steiner Verlag. Zweite Abteilung, Physische Farben, §188, S. 145
- [3] Buchholz, I. (1980): Zum Bild von Punkten und Gegenständen unter Wasser. In: *Praxis der Naturwissenschaften* 29, 9, S. 269-279
- [4] Plöger, W. (1982): Der Trick mit der Münze. Einführung in die Lichtbrechung im Physikunterricht. In: *Monatshefte für die Unterrichtspraxis* 50, 3, S. 175-180
- [5] Theilmann, F. (2010): Der Blick ins Becken. Perspektivische Effekte und Bildverzerrungen in einfachen Situationen mit optisch dichten Medien. In: *Physik und Didaktik in Schule und Hochschule* 9, 1, S. 45-53
- [6] Grebe-Ellis, J.; Theilmann, F.; Rang, M. (2009): Lichtspuren im Wasser – Ein Experiment zum Verhältnis von Brechung und Hebung. In: *Physik und Didaktik in Schule und Hochschule* 3, 8, S. 86-91
- [7] Grebe-Ellis, J.; Sommer, W.; Vogt, J. (2002): Abituraufgaben zur Hebung, Beugung und Polarisation. Kassel: Pädagogische Forschungsstelle
- [8] Schlichting, H. J. (2012): Wenn der Pool ins Schwimmen gerät: Physikalische Alltagsphänomene. Darmstadt: Primus Verlag
- [9] Krüger, G. (2011): Wo sehen wir die Dinge? In: Erb, R.; Grebe-Ellis, J. (Hg.): *Alles, worin der Mensch sich ernstlich einlässt, ist ein Unendliches*. Physikdidaktische Miniaturen. Berlin: Logos, S. 69-84
- [10] Stettler, P. (2011): Im Wasser Flamme. In: Erb, R.; Grebe-Ellis, J. (Hg.): *Alles, worin der Mensch sich ernstlich einlässt, ist ein Unendliches*. Physikdidaktische Miniaturen. Berlin: Logos, S. 183-204
- [11] Heepmann, B.; Muckenfuß, H.; Schröder, W.; Stiegler, L. (1991): *CVK Physik Arbeits- und Informationsbuch*. 1. Auflage, 4. Druck. Berlin: Cornelsen Verlag
- [12] Heepmann, B.; Muckenfuß, H.; Schröder, W.; Bresler, S. (2006): *Natur und Technik Physik 7/8*. 1. Auflage, 1. Druck. Berlin: Cornelsen Verlag
- [13] Bauer, K. L. (1875): Ueber den scheinbaren Ort eines in einem dichteren durchsichtigen Medium befindlichen, sowie eines durch eine sogenannte planparallele Platte betrachteten Lichtpunktes. In: *Annalen der Physik* 229, 12, S. 572-587
- [14] Bauer, K. L. (1875): Nachtrag zu meinem Aufsatz: Ueber den scheinbaren Ort eines in einem dichteren durchsichtigen Medium befindlichen, sowie eines durch eine sogenannte plan-

- parallele Platte betrachteten Lichtpunktes. In: *Annalen der Physik* 230, 3, S. 461-464
- [15] Nassar, A. (1994): Apparent Depth. In: *The Physics Teacher* 32, S. 526-529
- [16] Saxler, J. (1989): Zum Abbildungsfehler bei der Brechung an ebenen Grenzflächen. In: *Praxis der Naturwissenschaften* 38, 2, S. 38-41
- [17] Biezeveld, H. *et al.* (2005): Analysis of Pictures Taken with an Underwater Camera. In: *The Physics Teacher* 43, S. 158-161
- [18] Dittmann, H.; Schneider, W. B. (1989): Mit dem Computer ins Aquarium geschaut. In: Schneider, W. B. (Hrsg.): *Wege in der Physikdidaktik*. Bd. 1, Erlangen: Palm & Enke
- [19] Laird, E. (1938): The Position of the Image of an Object under Water. In: *The American Physics Teacher* 6, 1, S. 40
- [20] Bergmann, L.; Schaefer, C. (1978): *Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 3: Optik*. 7. Aufl. Berlin: De Gruyter
- [21] Richter, P. (1989): Wie sieht man mit beiden Augen blickend einen geraden Stab, der in Wasser ragt? In: *Praxis der Naturwissenschaften – Physik* 8, 38, S. 43-44
- [22] Bartlett, A. A.; Lucero, R.; Johnson, G. O. (1984): Note on a common virtual image. In: *American Journal of Physics* 52, 7, S. 640-643
- [23] Reese, H. M. (1938): Where is a Fish Seen? In: *American Journal of Physics* 6, 3, S. 163-164
- [24] Althage, G. (1959): Durch das Brechungsgesetz definierte Abbildungen und deren geometrische Eigenschaften. Unveröffentlichte Hausarbeit für das Lehramt
- [25] Stockmeyer, K. E. A. (1929): Die Erscheinung der optischen Hebung. Zugleich ein Beispiel für die richtige Eingliederung des Menschen in das Ganze der Physik. In: *Erziehungskunst* 3, 3/4, S. 227-236
- [26] Baravalle, H. von (1934): *Erweiterung der Perspektive, Krümmung des Sehraumes*. Stuttgart: Waldorf-Verlag
- [27] Arvidsson, G. (1938): Image of an Object Under Water. In: *American Journal of Physics* 6, 3, S. 164
- [28] Bartlett, A. A. (1995): The article „Apparent depth“. In: *The Physics Teacher* 33, 4, S. 199
- [29] Johnson, G. O. (1995): Further illuminating comments on rays and images. In: *The Physics Teacher* 33, 4, S. 198-199
- [30] Kinsler, L. E. (1945): Imaging of Underwater Objects. In: *American Journal of Physics* 13, 4, S. 255-257
- [31] Walker, J. (1984): What is a fish 's view of a fisherman and the fly he has cast on the water? In: *The Amateur Scientist* 250, 3, S. 108-113
- [32] Arizaga, R. *et al.* (2010): Image distortion due to refraction by planar surfaces, *European Journal of Physics* 31, S. 115-127
- [33] Ascher, F. (1930): Noch einmal die optische Hebung. Ein Einwand zum Artikel über die optische Hebung von Karl E. A. Stockmeyer mit einer Erwiderung. In: *Erziehungskunst* 4, 4, S. 171-174
- [34] Helsdon, R. M. (1977): Stereoscropy. In: *Physics Education* 12, 2, S. 67
- [35] Horváth, G. & Varjú, D. (1991): On the structure of the aerial visual field of aquatic animals distorted by refraction. In: *Bulletin of Mathematical Biology*, 53, 3, S. 425-441
- [36] Glaeser, G.; Schröcker, H.-P. (2000): Reflections on Refractions. In: *Journal for Geometry and Graphics* 4, 1, S. 1-18
- [37] Bergmann, L.; Schaefer, C. (2004): *Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 3, Optik: Wellen- und Teilchenoptik*, hrsg. von H. Niedrig, 10. Aufl. Berlin: De Gruyter
- [38] Hecht, E. (2005): *Optik*. 4., überarb. Aufl. München: Oldenbourg
- [39] Grebe-Ellis, J. (2010): Schattenbilder wie Schriftzeichen lesen. Eine bildoptische Studie nach Johannes Kepler. In: *Physik und Didaktik in Schule und Hochschule* 1, 9, S. 34-44
- [40] Berry, M. (1972): Reflections on a Christmas-tree bauble. In: *Physics Education* 7, S. 1-6
- [41] Augustin, A. J. (2007): *Augenheilkunde*. Berlin: Springer Verlag
- [42] Bradley, J. C. *et al.* (2011): Dark-adapted pupil diameter as a function of age measured with the NeurOptics pupillometer. In: *Journal of Refractive Surgery* 27, 3, S. 202-207