

## Hör mal – die Elektronendichte! Didaktische Erschließung eines geo/astrophysikalischen Parameters durch Messung mit einfachen Mitteln, Elementarisierung der Hintergrundtheorie und Lernaufgaben

Patrik Vogt<sup>1</sup>, Andreas Müller<sup>2</sup>

<sup>1</sup> PH Freiburg, Abteilung Physik, Kunzenweg 21, 79117 Freiburg

<sup>2</sup> University of Geneva, Faculty of Sciences / Physics Department and Institute of Teacher Education  
[patrik.vogt@ph-freiburg.de](mailto:patrik.vogt@ph-freiburg.de), [Andreas.Mueller@unige.ch](mailto:Andreas.Mueller@unige.ch)

(Eingegangen: 11.12.2012; Angenommen: 20.05.2014)

### Kurzfassung

Hätten wir Antennen statt Ohren, so wären wir von einem allgegenwärtigen und immerwährenden Konzert im VLF-Bereich (Very Low Frequency) umgeben, mit „Instrumenten“, die von der globalen Gewitteraktivität sowie vom Sonnenwind gespielt werden und von deren Signalen aller Art: z. B. Knistern (Sferics), eine Art Vogelgezwitscher (Tweeks) oder in der Frequenz abfallende Pfeiftöne (Whistlers); siehe [1] für faszinierende Hörbeispiele. Im vorliegenden Artikel wird vorgestellt, wie diese Höreindrücke (i) empfangen und (ii) zur Abschätzung eines mikroskopischen sowie geo/astro-physikalischen Parameters – nämlich zur Bestimmung der Elektronendichte im erdnahen Weltraum – genutzt werden können. Die benötigte Hintergrundtheorie ist für Schule und Lehrerbildung im Allgemeinen zu komplex, weshalb (iii) außerdem ein Zugang entwickelt wurde, der es Lernenden erlaubt, ohne jegliche Vorkenntnisse aus dem Bereich der Magnetohydrodynamik (z. B. Begriffe wie Plasma- oder Gyrationfrequenz) und allein unter Nutzung von Schulmathematik, die notwendige Berechnungsgleichung (von einem Faktor der Größenordnung 1 abgesehen) zu erschließen.

Darüber hinaus werden eine Reihe weiterer Phänomene des VLF-Bereichs sowie geophysikalische Abschätzungen (z. B. der Ionosphärenhöhe und der Feldlinienlänge) vorgestellt, die in Form von Aufgabenstellungen mit ausführlichen Lösungen präsentiert werden.

Es wird somit in mehreren konkreten Fragestellungen gezeigt, wie zunächst sehr schwer zugänglich erscheinende Größen, weil sie u. a. die atomare Größenskala (Elektronendichte) und tausende von Kilometern entfernte Ereignisse (obere Atmosphäre, erdnahe Weltraum) betreffen, mit einfachen experimentellen und mathematischen Mitteln „vom Boden aus“ (in doppeltem Sinne) bestimmt werden können. Damit bietet das Thema ein Beispiel für Grundformen naturwissenschaftlichen Arbeitens (indirekte Messung, Näherungen u. a. m.) anhand eines Gegenstandes der modernen Physik (ab ca. 1950), der von Schülerinnen und Schülern eigenständig untersucht werden kann.

### 1. Einleitung

Der Entladungskanal eines Blitzes stellt ein riesiges verzweigtes Antennengebilde dar, über welches der Impulsstrom der Haupt- und Zwischenentladungen ein sehr breitbandiges Spektrum an elektromagnetischen Wellen abstrahlt [2]; der größte Energieanteil entfällt dabei auf den VLF-Bereich, der von 3 bis 30 kHz reicht. Die emittierten Signale bezeichnet man als Atmosphericics oder kurz Sferics. Durchdringt ein solcher elektromagnetischer Impuls die Ionosphäre, so kann er sich entlang der Magnetfeldlinien des Erdmagnetfeldes ausbreiten und am magnetischen Konjugationspunkt des Emissionsortes registriert werden (Abb. 1; Aufgabe 7.4).

Die elektromagnetischen Wellen durchlaufen bei der Ausbreitung in diesen Höhen (mehrere Erdradien) ein spezielles Medium, nämlich ein Plasma mit aus dem Sonnenwind stammenden Elektronen. Diese

führen ihrerseits im Magnetfeld der Erde eine Kreis- oder Gyrationbewegung um die Feldlinien aus, sozusagen einen  $e/m$ -Versuch im Großen (Gyrationbewegung in Abb. 1).

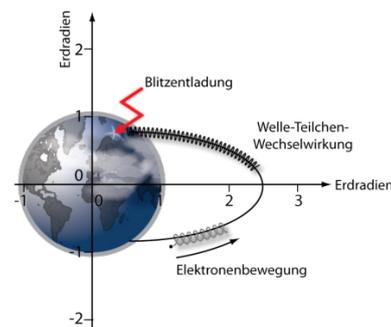
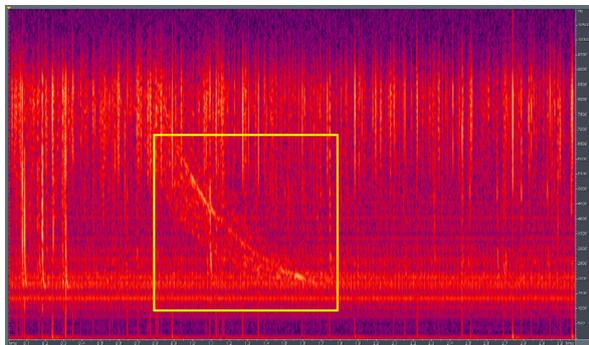


Abb. 1: Entstehung eines Whistlers [3]

Durch die Wechselwirkung der elektromagnetischen Welle mit diesen Plasmaelektronen unterliegt das Signal einem Dispersionseffekt: Verschiedene Wellenfrequenzen breiten sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten aus, je nach Frequenzabstand zu der Gyrationfrequenz der Elektronen.



**Abb. 2:** Dynamisches Spektrum eines Whistlers (Frequenz in Abhängigkeit von der Zeit), dargestellt mit der Software Cool Edit Pro [7]

Die Dispersion äußert sich in einer kontinuierlichen Abnahme der Frequenz (Abb. 2). Schallgewandelt ähnelt das Signal daher einem Pfeifton fallender Frequenz, woraus sich die Bezeichnung „Whistler“ (von engl. to whistle = pfeifen) ableitet (siehe Aufgaben 7.4 und 7.5).

Betrachtet man den Entstehungs„mechanismus“ in Abb. 1, ist eine Abhängigkeit dieses Dispersionseffektes von folgenden physikalischen Faktoren zu erwarten:

- dem Erdmagnetfeld längs der betrachteten Feldlinie, weil es die Gyrationbewegung der Elektronen bestimmt;
- der Lage und Länge der betrachteten Feldlinie, weil die lokale Stärke des Erdmagnetfeldes davon abhängt, und weil auf einer langen Feldlinie das „Auseinanderziehen“ der Frequenzkomponenten natürlich ausgeprägter ist als auf einer kurzen;
- der Elektronenladung, weil sie die Stärke der Wechselwirkung mit den Whistler-Wellen regelt.

Wie im Folgenden gezeigt, lässt sich aus dieser qualitativen Betrachtung sogar eine mathematisch einfache, ungefähre quantitative Beschreibung gewinnen, die das Wesentliche beschreibt, ohne in die volle Komplexität der Sache einsteigen zu müssen (Magnetohydrodynamik). Es lässt sich zusätzlich ein experimentelles Verfahren angeben, das auf dieser Basis mit ebenfalls geringem (schultauglichem) Aufwand erlaubt, einen mikroskopischen Parameter (die Elektronendichte) in großer Höhe (mehrere Erdradien) zu bestimmen.

Es wird nun zunächst beschrieben, wie die Signale des VLF-Bereichs mit einfachen Mitteln empfangen werden können (Abschnitt 2), wie die anhand eines empfangenen Whistler-Signals gemessene Dispersion zur Abschätzung der Elektronendichte des erdna-

hen Weltraums genutzt werden kann (Abschnitt 3), wie sich die für Schule und Lehrerbildung im Allgemeinen zu komplexe Hintergrundtheorie elementarisieren lässt (Abschnitt 4) und welche Möglichkeiten wir für einen Einsatz in Ausbildungssituationen sehen (Abschnitt 5).

Eine Erarbeitung der begrifflichen Grundlagen, verschiedener experimenteller Aussagen und Schlussfolgerungen sowie weiterer Phänomene der atmosphärischen Impulsstrahlung in Form von Aufgabenstellungen (Abschnitt 7) ist aus didaktischer Sicht eine zusätzliche wesentliche Komponente des Beitrages.

## 2. Experimentelles Vorgehen

### 2.1. Empfang langer Wellen

Da die im VLF-Bereich liegenden registrierten Signale im menschlichen Hörbereich liegen, brauchen sie nicht frequenztransformiert oder demoduliert zu werden, wie es z. B. bei Rundfunkempfängern der Fall ist. Prinzipiell wird zur akustischen Wahrnehmung nur ein Schallwandler benötigt, der das elektrische in ein mechanisches Signal umwandelt. Dabei würden jedoch zahlreiche Störungen den Empfang erheblich beeinflussen, weshalb geeignete Hoch- und Tiefpässe verwendet werden müssen. Ein Blockschaltplan der Empfangsanlage ist in Abb. 4 dargestellt.

#### 2.1.1. Die Empfangsantenne

Zum Empfang der VLF-Signale kann eine elektrische Antenne mit äußerst primitivem, jedoch zweckmäßigem und preisgünstigem Aufbau zum Einsatz kommen: Man legt z. B. eine 2 m lange Kupferlitze (konventionelles Lautsprecherkabel) entlang einer Dachlatte, befestigt diese an einem relativ freistehenden Mast geringer Höhe und in einem Abstand von ca. 50 Metern zum Stromnetz. Der Sferics-Empfänger [4], der wie bereits erläutert ausschließlich als Filter und Verstärker dient (für Schaltpläne siehe [5]), wird zur Vermeidung größerer Verluste direkt am Fuße der Antenne betrieben (Abb. 3).

#### 2.1.2. Festlegung des Frequenzbereichs

Im unteren Frequenzbereich ist die 50-Hz-Netzfrequenz die Ursache für ein starkes konstantes Brummgeräusch („Netzbrummen“), was die größte Störquelle darstellt. Die Unterdrückung der Grundfrequenz könnte relativ einfach mit einem Kerbfilter erreicht werden; da jedoch auch die Oberwellen gefiltert werden müssen, wurde bei dem benutzten Empfänger auf einen 1-kHz-Hochpass zurückgegriffen. Durch diesen Filter und einem genügend großen Abstand zur Störquelle (mindestens 50 m), lassen sich die Netzfrequenz und deren Oberwellen gut umgehen. Völlig unmöglich ist der Sferics-Empfang dagegen unterhalb von Hochspannungsleitungen, wo auch die Verwendung zusätzlicher Filter kaum Besserung bewirkt.

Oberhalb von 10 kHz ist das Frequenzband für militärische und zivile Langwellensender freigegeben, was ebenfalls Anlass für starke Störungen sein kann. Aufgrund dieser Störquellen wurde durch einen geeigneten Tiefpass die obere Grenzfrequenz auf 10 kHz festgelegt. In der Nähe eines Langwellensenders kann es dennoch sein, dass trotz Filter und einem Frequenzabstand von 100 kHz kein Sferics-Empfang möglich ist. Eine Entfernung von 10 km ist oftmals erforderlich.

### 2.1.3. Aufnahme, Wiedergabe und Auswertung des Signals

Zur Aufnahme und Wiedergabe des verstärkten Signals kann eine handelsübliche Stereoanlage, ein PC oder ein Laptop genutzt werden. Für die anschließende Auswertung eignen sich verschiedene Tonanalyseprogramme, die zum Teil als Shareware- oder sogar Freeware-Software erhältlich sind. Die in dieser Arbeit eingebundenen Spektrogramme wurden mit dem Programm Cool Edit (jetzt Adobe Audition) generiert, das im Internet zum Download bereitsteht (Shareware!) [7]. Zwei erste Beispiele, wie durch einen der VLF-Signaltypen, die mit der Anlage aufgenommen und ausgewertet werden können, den sog. „Tweeks“ („Zwitschern“), physikalische Größen messbar werden, finden sich in den Aufgaben 7.2 und 7.3.

Wir wenden uns nun dem experimentellen Hauptgegenstand dieses Beitrags zu.



Abb. 3: Antenne zum Sferics-Empfang: einfache Kupferlitze entlang einer Dachlatte

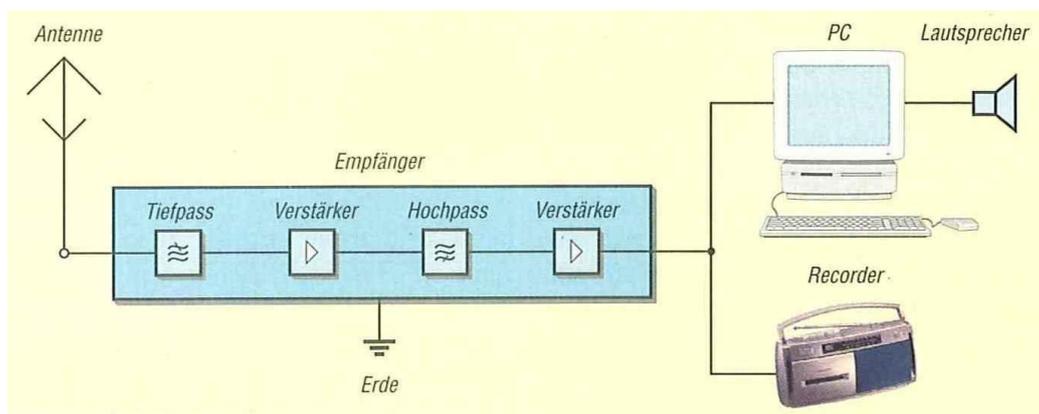


Abb. 4: Blockschaltplan der Empfangsanlage [6]

## 2.2. Experimentelle Bestimmung der Whistler-Dispersion

Bereits L. R. O. STOREY hat im Jahr 1953 erkannt, dass die Ankunftszeit  $t$  der einzelnen Frequenzen  $f$  proportional ist zu  $1/\sqrt{f}$  und definierte den Proportionalitätsfaktor als Dispersionskonstante, auch kurz „Dispersion“  $D$  [8]. Es gilt also:

$$D = \sqrt{f} \cdot t \quad \{1\}$$

(Einheit  $s^{1/2}$ ). Um nun  $D$  für einen registrierten Whistler zu bestimmen, kann der Frequenzverlauf mit Schulmitteln unter Nutzung einer geeigneten Tonanalysesoftware (z. B. Cool Edit Pro [7]) ausgelesen werden (Abb. 5). Aufgrund der Proportionalität zwischen  $1/\sqrt{f}$  und  $t$  würden zur Ermittlung

von  $D$  prinzipiell zwei Whistler-Frequenzen und die dazugehörigen Ankunftszeiten ausreichen, es bietet sich jedoch an, die Geradensteigung und somit die reziproke Whistler-Dispersion mit Hilfe einer linearen Regression zu bestimmen (Abb. 6). Diese führt für den betrachteten Whistler zur Beziehung

$$\frac{1}{\sqrt{f}}(t) = 14,2 \cdot 10^{-3} s^{-1/2} \cdot t - 0,5 \cdot 10^{-3} s^{1/2}, \quad \{2\}$$

(mit einem adjustierten Bestimmtheitsmaß nahe eins,  $R_{adj.}^2 > 0,99$ ) und einem Steigungsfehler von  $0,1 \cdot 10^{-3} s^{1/2}$ ). Somit ergibt sich die Whistler-Dispersion zu

$$D = (70 \pm 0,5) s^{1/2}, \quad \{3\}$$

was einem typischen Wert für unsere Breiten entspricht.

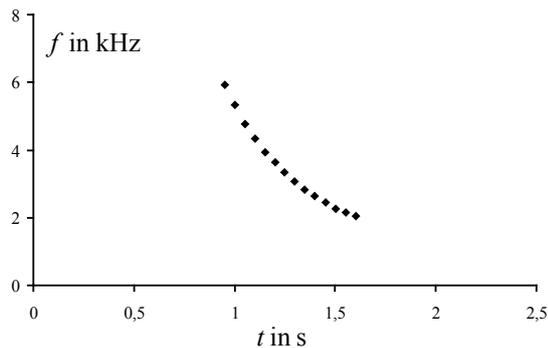


Abb. 5: Mit Cool Edit Pro ausgelesene Frequenzen

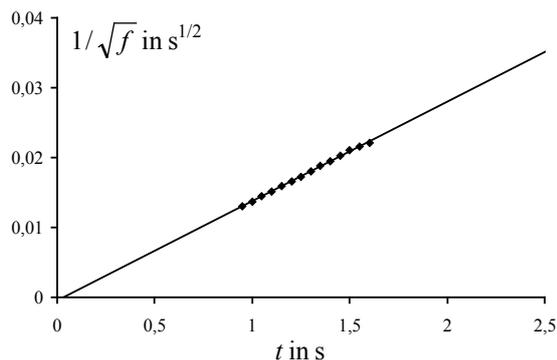


Abb. 6: Ermittlung der Whistler-Dispersion

### 3. Experimentelle Bestimmung der Elektronendichte über die Whistler-Dispersion

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie als zentrale Anwendung des experimentellen Verfahrens aus Abschnitt 2 die Elektronendichte  $N_e$  in über 10 000 km Höhe bestimmt werden kann. Für die Abhängigkeit von  $N_e$  von der Höhe (gemessen als Abstand zum Erdmittelpunkt  $r$ ) gilt im fraglichen Höhenbereich (bis vier Erdradien) in guter Näherung ein einfaches Potenzgesetz der Form ([2], [9]):

$$N_e(r) \propto \frac{1}{r^3} \quad \text{bzw.} \quad N_e(r) \approx \frac{k}{r^3}. \quad \{4\}$$

(da  $r^{-3}$  schon die Einheit einer Dichte hat, ist die Proportionalitätskonstante  $k$  dimensionslos).

Die Elektronendichte  $N_e(r)$  ist mit unserem Verfahren messbar, weil sie in eindeutiger Beziehung zu der „Dispersion“  $D$  steht. Letztere hängt, wie in Abschnitt 1 erläutert, für einen Whistler längs einer gegebenen Feldlinie von deren Form und Länge  $s$ , von der magnetischen Flussdichte  $B$  des Erdmagnetfeldes längs dieser Feldlinie, von der Ladung  $e$  des Elektrons und von  $N_e$  ab. In „voller Schönheit“ lautet die Beziehung [8]:

$$D = \sqrt{\frac{e\mu_0}{8\pi}} \int_s \sqrt{N_e(r)/B(r)} ds \quad \{5\}$$

(mit der Elementarladung  $e$  und der magnetischen Feldkonstante  $\mu_0$ ). Einsetzen der Dipolform des Erdmagnetfeldes und Auswertung des Integrals ergibt als vereinfachtes Näherungsergebnis:

$$D \approx a \cdot s(\varphi_B) \cdot \sqrt{\frac{e \cdot k}{M_0}} \quad \{6\}$$

$$\approx 0,63 s(\varphi_B) \cdot \sqrt{\frac{e \cdot k}{M_0}}$$

In der Formel stehen explizit die Feldlinienlänge  $s(\varphi_B)$  (für die geographische Breite des Beobachtungsstandortes,  $\varphi_B$ ) sowie das magnetisches Moment der Erde (als Stärkeparameter des Dipolfeldes;  $M_0 \approx 7,78 \cdot 10^{22} \text{ Am}^2$ ;  $a$  ist ein numerischer Vorfaktor der Größe 1). In der zweiten Zeile wurden die für den Beobachtungsstandort Landau gültigen Werte eingesetzt;  $\varphi_B = 0,87$  ( $50^\circ$ ),  $s(\varphi_B) \approx 29\,100 \text{ km}$ ; zur Berechnung siehe Aufgabe 7.6.

Die Herleitung von Gl. {5} in einem exakten Modell (einschließlich der zu {6} führenden Auswertung des Integrals) sind sicher jenseits des in der Schule Machbaren. Es ist deshalb ein Anliegen der vorliegenden Arbeit, hierfür einen elementarisierten Zugang anzubieten. Dies erfolgt im Abschnitt 4: Die Herleitung der für die Auswertung entscheidenden Gleichung {6} ist – bis auf den Vorfaktor der Größenordnung 1 – mit elementaren Mitteln (Potenzrechnung) möglich!

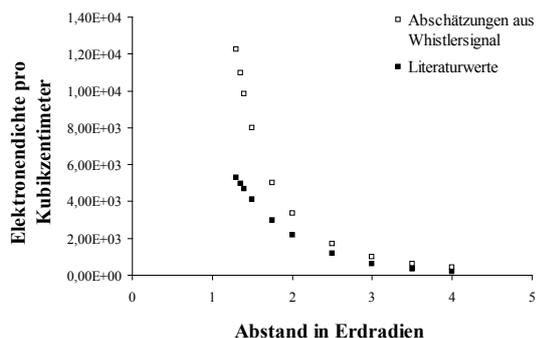
Ausgehend von {6} ist für die Messung nun entscheidend, dass die gesuchte Elektronendichte  $N_e$  (bzw. der Parameter  $k$ ) damit explizit verknüpft ist. Auflösen nach der Konstanten  $k$  und Einsetzen der Zahlenwerte, insbesondere des eigenen Messwertes  $D \approx (70 \pm 0,5) \text{ s}^{1/2}$ , siehe Gl. {3}, ergibt

$$k \approx 2,52 \frac{D^2 \cdot M_0}{s(\varphi_B)^2 \cdot e} \approx (7,1 \pm 0,1) \cdot 10^{30} \quad \{7\}$$

und liefert die gesuchte Elektronendichte

$$N_e(r) \approx \frac{k}{r^3} \approx \frac{7,1 \cdot 10^{30}}{r^3}. \quad \{8\}$$

In Abb. 7 sind die für verschiedene Abstände ermittelten Elektronendichten den Literaturwerten [11] gegenübergestellt. Dieser Vergleich zeigt: Die mittels der Näherung {6} und der eigenen experimentellen Bestimmung von  $D$  ermittelten Abschätzungen stimmen oberhalb von zwei Erdradien zumindest von der Größenordnung her, und oberhalb von drei Erdradien mit einer Abweichung von unter 10 % mit den tatsächlichen Elektronendichten überein.



**Abb. 7:** Vergleich der abgeschätzten mit den tatsächlichen Elektronendichten in Abhängigkeit des Abstands zum Erdmittelpunkt (für den Erdradius wurde ein Wert von 6 380 km angenommen); die Fehlergrenzen der Abschätzungen sind kleiner als die Punktdarstellungen.

#### 4. Elementarisierung des theoretischen Hintergrundes mit Hilfe der Dimensionsanalyse

Eine ausführliche Herleitung von Gleichung {6} findet sich in [10]. Wir stellen hier einen elementarisierten Zugang vor, der mit Potenzrechnung (Dimensionsanalyse) auskommt.

Da wie oben erläutert die Whistler-Dispersion mit der Länge des Ausbreitungsweges zunimmt, definieren wir hierzu zunächst die wegstreckenunabhängige Größe

$$D^* = \frac{D}{s} = 0,63 \sqrt{\frac{e \cdot k}{M_0}}, \quad \{9\}$$

was die nachfolgende Betrachtung übersichtlicher gestaltet. Zur quantitativen Erschließung der Beziehung {9} verwenden wir nun die Methode der Dimensionsanalyse [12]. Dazu muss man sich überlegen (dies kann eine weitere Aufgabe sein), von welchen Größen  $D^*$  überhaupt abhängen könnte. Dies sind im einfachsten Fall, auf den wir uns hier beschränken wollen (siehe Abschnitt 1), die Ladung  $e$  des Elektrons, die magnetische Feldkonstante  $\mu_0$ , die Elektronendichte  $N_e$  sowie die magnetische Flussdichte  $B$ . Allerdings ist nicht bekannt, in welcher Potenz diese Größen jeweils in  $D^*$  eingehen. Man macht daher den Ansatz

$$D^* \sim e^a \mu_0^b N_e^c B^d. \quad \{10\}$$

Die Exponenten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  sind wie gesagt unbekannt und im weiteren Verlauf mittels Dimensionsanalyse zu ermitteln. Die Einheit von  $D^*$  folgt zunächst unmittelbar aus den Definitionen von  $D$  bzw.  $D^*$  und lautet:

$$[D^*] = [t^{1/2} / s] = s^{1/2} \cdot m^{-1}. \quad \{11\}$$

Die gesuchten Exponenten müssen nun so gewählt werden, dass sich beim Ansatz {10} für  $D^*$  die gleiche Dimension ergibt. Dies führt nach Einsetzen der Einheiten in {10} auf folgendes lineares Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} \text{Ampere, A:} & \quad a - b = 0 \\ \text{Volt, V:} & \quad b + d = 0 \\ \text{Sekunden, s:} & \quad a + b + d = 1/2 \\ \text{Meter, m:} & \quad -b - 3c - 2d = -1 \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung mit  $a = b = c = 1/2$  bzw.  $d = -1/2$ . Einsetzen der ermittelten Exponenten in {10} führt zu

$$D^* \sim \sqrt{\frac{e \mu_0 N_e}{B}}. \quad \{12\}$$

Unter Berücksichtigung des Potenzgesetzes {4} für  $N_e$  sowie der Formel für die Flussdichte des Erdmagnetfeldes [13],

$$B(r, \varphi) = \frac{\mu_0 M_0}{4\pi} \sqrt{1 + 3 \sin^2 \varphi} \cdot \frac{1}{r^3}, \quad \{13\}$$

ergibt sich dann

$$D^* \sim \sqrt{\frac{e \cdot k}{M_0}}. \quad \{14\}$$

Hier wurde die Winkelabhängigkeit vernachlässigt, da sie für die Dimensionsbetrachtung keine Rolle spielt. Bei der exakten Behandlung geht sie in das Integral in Gl. {5} ein und ergibt einen dimensionslosen Vorfaktor der Größenordnung 1.

Wie ein Vergleich mit der Gleichung {9} zeigt, fehlt zur vollständigen Theorie lediglich ein konstanter Faktor von 0,63! Eine Einheitenbetrachtung liefert also eine approximative quantitative Begründung der Dispersionsformel, auf der die experimentelle Bestimmung der ionosphärischen Elektronendichte in Abschnitt 3 beruht.

#### 5. Didaktische Überlegungen und Schlussbemerkungen

Möchte man das Thema des elektromagnetischen Strahlungskonzertes in der Erdatmosphäre im Schulunterricht behandeln, so ist offenkundig, dass dies infolge der notwendigen Voraussetzungen nur in der Gymnasialen Oberstufe (im besonderen an technischen Gymnasien) erfolgen kann, und zwar z. B. im Zusammenhang mit der Behandlung der Gewitterelektrizität, elektromagnetischer Wellen oder Filterschaltungen (Hoch- und Tiefpässe), die für den VLF-Empfang von großer Bedeutung sind und den Bau eines einfachen Sferics-Empfängers erlauben (vgl. Kapitel 2). Ein weiterer Einsatzbereich stellt die Physiklehrerbildung dar, insbesondere für das „Schulorientierte Experimentieren“, wo die hier vorgestellte Bearbeitung ein reichhaltiges Übungsbeispiel für die Behandlung fächerübergreifender Aspekte (Geo-/Astrophysik) darstellt, oder für physikalisch-didaktische Kreativität in der Erschließung einer Fragestellung mit zugänglichen experimentellen und theoretischen Mitteln (Empfangsanlage, Dimensionsanalyse), und für die Entwicklung von Aufgaben mit verschiedenen Funktionen (Erarbeitung begrifflicher Grundlagen, Ver-

ständnis weiterer experimenteller Phänomene, u. a. m.; siehe unten und Abschnitt 7).

Welche didaktischen Argumente sprechen für die Auswahl genau dieses Beispiels? Das Thema befindet sich an der Schnittstelle von Astronomie/Astrophysik und Moderner Physik (seit 1950), zwei Teilbereiche der Physik, denen aus doppeltem Grund ein beträchtliches didaktisches Potential zugesprochen wird.

Zum einen für das Schülerinteresse: Fragestellungen aus Astronomie und Astrophysik gehören zu den Themen, die von Schülern nachweislich am interessantesten angesehen werden (siehe z. B. die Ergebnisse des ROSE-Projektes, [14], [15]); dahinter steht ein „Weltbild-Bedürfnis“ junger Menschen, das durch astronomische und astrophysikalische Kontexte besonders angesprochen wird ([16], Kap. 14).

Zum anderen für das Lernen, insbesondere das kumulative Lernen: Themen aus der Modernen Physik bieten einen besonders guten Anlass, Wissen aus verschiedenen Bereichen (hier etwa Wellenlehre, Elektromagnetismus) zu reaktivieren und in einem neuen Zusammenhang zu integrieren ([14], [18]).

Ein weiteres didaktisches Argument für die Behandlung des Themas ergibt sich aus dem besonderen, gewissermaßen „detektivischem“ Charakter der hier vorgestellten Messungen. Insbesondere erscheint nämlich die Ermittlung eines mikroskopischen Parameters (die Elektronendichte) in mehr als 10 000 km Abstand (im erdnahen Weltraum) zunächst als fast aussichtsloses Unterfangen. Wenn dies dann ausschließlich unter Verwendung einer einfachen Empfangsanlage möglich ist (die von Schülern in einem Projekt selbst gebaut werden kann), so stellt bereits die Angabe der richtigen Größenordnung ein – vielleicht auch für Schülerinnen und Schüler – erstaunliches Ergebnis dar. Die hier vorgestellten Ergebnisse liefern damit auf zwei Ebenen auch einen Beitrag zu den in der aktuellen didaktischen Diskussion und Lehrplanentwicklung geforderten Themen „Nature of Science“ („Natur der Naturwissenschaften“, [16], Kap. 1.2.3) und „Naturwissenschaftliches Arbeiten“ ([16], Kap. 2.2.1), [19]):

(i) Auf der Ebene des Experimentes die Erschließung schwer zugänglicher Größen durch Ausnutzung eines guten Verständnisses der physikalischen Zusammenhänge, sowie die grundlegenden wissenschaftstheoretischen Aspekte, die damit zusammenhängen (indirekte Messung, Modellabhängigkeit der Messung); dies sind Denk- und Arbeitsweisen, die u. a. für die Entwicklung menschlichen Wissens über das Weltall von besonderer Bedeutung waren.

(ii) Auf der Ebene der theoretischen Beschreibung die besondere Rolle, die Näherungen und Größenordnungsdenken (hier speziell die Dimensionsanalyse) für das physikalische Verständnis spielen [20], [21]. Bertrand Russel hat dies wie folgt ausgedrückt: „Es mag paradox klingen, doch alle exakte Wissenschaft wird von dem Gedanken der Approximation

beherrscht“. Dies gilt insbesondere für geo- und astrophysikalische Fragestellungen (Alter der Erde, kosmische Entfernungsskalen), wegen der großen räumlichen und zeitlichen Abstände, die uns von dem Geschehen trennen; das vorgestellte Beispiel erlaubt eine aktive Einsicht in dieses Wesenselement der „Natur der Naturwissenschaften“ auf der Basis eigenständigen, experimentellen Arbeitens.

Ihre konkrete Umsetzung finden diese didaktischen Ziele, wie gesagt, in dem Hauptgedankengang, wie er in den Abschnitten 2-4 dargestellt ist. Unterstützt wird die Erarbeitung der begrifflichen Grundlagen, verschiedener experimenteller Aussagen und Schlussfolgerungen sowie weiterer Phänomene der atmosphärischen Impulsstrahlung in Form von Aufgabenstellungen (Abschnitt 7), die so in Schule und Lehrerbildung zum Einsatz kommen können; hierbei kann die Problemkomplexität durch Variation des Aufgabentextes oder durch den Einsatz gestaffelter Hilfen angepasst werden, um so dem jeweiligen Leistungsstand der Lerngruppe gerecht zu werden. Diese Aufgaben sind aus didaktischer Sicht eine wesentliche Komponente des Beitrages.

## 6. Literatur

- [1] Vogt, P. & Müller, A. (2010). Höret! Die Elektronendichte! Messung eines geophysikalischen Parameters und die Elementarisierung der Hintergrundtheorie. In: PhyDid B – Didaktik der Physik – Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung, Hannover 2010. Verfügbar unter: <http://phydid.physik.fu-berlin.de/index.php/phydid-b/article/view/216/259>
- [2] Volland, H. (1968): Die Ausbreitung langer Wellen. Braunschweig: Vieweg.
- [3] Dankenswerterweise zur Verfügung gestellt von Dr. Marcus Blümel (PH Freiburg).
- [4] Der in der Arbeit benutzte Sferics-Empfänger kann als preisgünstiger Bausatz unter <http://www.sfericsempfang.de> [Stand: 06/2014] bezogen werden.
- [5] Vogt, P. (2002): Experimentelle und theoretische Untersuchung ausgewählter Phänomene der atmosphärischen Elektrodynamik. Staatsexamensarbeit an der Universität Koblenz-Landau/Campus Landau.
- [6] Vogt, P. (2003): Ergebnisse einer Whistlerbeobachtung, Funkamateure 52, 6, 564-565.
- [7] Webdownload von Cool Edit Pro: <http://www.download3k.com/Install-Cool-Edit-Pro.html> [Stand 6/2014]
- [8] Storey, L. R. O. (1953): An investigation of whistling atmospherics, Phil. Trans. A 246, 113-141.
- [9] Kertz, W. (1971): Einführung in die Geophysik II. Mannheim: Bibliographisches Institut.
- [10] Vogt, P. & Müller, A. (2008): Höret! Die Elektronendichte! Messung eines geophysikalischen

- Parameters mit ungewöhnlichen Mitteln. In: V. Nordmeier, H. Grötzebauch (Hrsg.), CD zur Frühjahrstagung des Fachverbandes Didaktik der Physik der Deutschen Physikalischen Gesellschaft – Berlin 2008. Berlin: Lehmanns.
- [11] ESA Requirements and Standards Division (2007): Space Engineering. Space Environment. Verfügbar unter: [http://www.ecss.nl/forums/ecss/dispatch.cgi/home/showFile/100698/d20080421112948/No/ECSS-E-10-04\\_v0.10.pdf](http://www.ecss.nl/forums/ecss/dispatch.cgi/home/showFile/100698/d20080421112948/No/ECSS-E-10-04_v0.10.pdf) [Stand: 05/2010]
- [12] Pescetti, D. (2008): Dimensional analysis and qualitative methods in problem solving, Eur. J. Phys. 29, 697–707.
- [13] Lliboutry, L. (1999): Quantitative Geophysics and Geology. Heidelberg: Springer.
- [14] Sjøberg, S. & Schreiber, C. (2007). Reaching the minds and hearts of young people: What do we know about their interests, attitudes, values and priorities? What about the interest for space science? Oslo: University, Department of Teacher Education and School Research/Science Education. <http://roseproject.no/network/countries/norway/eng/nor-sjoberg-issi-2007.pdf> [Stand 07/1011]
- [15] Sjøberg, S. and Schreiber, C. (2010). The ROSE project. An overview and key findings. Oslo: University, Department of Teacher Education and School Research/Science Education. <http://roseproject.no/network/countries/norway/eng/nor-Sjoberg-Schreiner-overview-2010.pdf> [Stand 01/2012]
- [16] Kircher, E., Girwidz, R. & Häußler, P. (2009): Physikdidaktik: Theorie und Praxis. Berlin: Springer. (2. Auflage)
- [17] MNU (2001) Physikunterricht und naturwissenschaftliche Bildung. – aktuelle Anforderungen. (MNU-Empfehlungen zur Gestaltung von Lehrplänen bzw. Richtlinien für den Physikunterricht). In: Der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht, 54(3), I-XVI.
- [18] Schecker, H.: TIMSS-Konsequenzen für den Physikunterricht. In: Bundesministerium für Bildung und Forschung (Hrsg.): TIMSS-Impulse für Schule und Unterricht, Bonn: BMBF (2001), 85-97.
- [19] Hertrampf, M. (Redaktion) (2003): Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts. Abschlussbericht. Kiel: Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften (IPN) <http://sinus-transfer.uni-bay-reuth.de/fileadmin/MaterialienBT/abschlussbericht.pdf> [Stand 11/2012]
- [20] Müller, R.. *Fermiprobleme* (Themenheft), Praxis der Naturwissenschaften – Physik in der Schule 8/50 (2001).
- [21] Weinstein, L., Adam, J.A. (2008). Guesstimation: Solving the World's Problems on the Back of a Cocktail Napkin. Princeton: University Press.

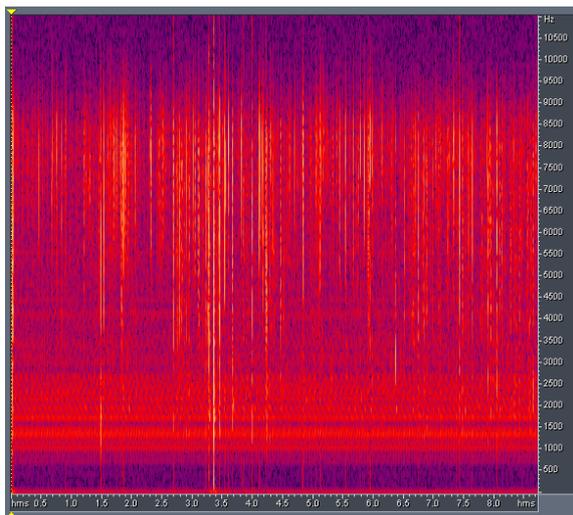
## 7. Anhang: Aufgaben

### 7.1. Sferics: Zusammenhang von Blitz- und Sferics-Aktivität

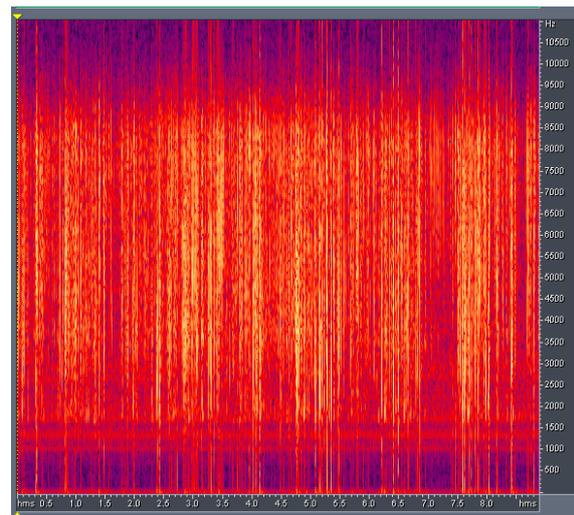
Der Entladungskanal eines Blitzes (über die aktuelle Blitzaktivität kann man sich z. B. im Internet anhand von Blitzkarten informieren, <http://en.allmetsat.com/images/lightning-europe.php>) stellt ein riesiges verzweigtes Antennengebilde dar, über das der Impulsstrom der Haupt- und Zwischenentladungen ein sehr breitbandiges Spektrum an elektromagnetischen Wellen abstrahlt; der größte Energieanteil entfällt dabei auf den VLF-Bereich, der von 3 bis 30 kHz reicht. Die emittierten Signale bezeichnet man als Atmospherics oder kurz Sferics. Registriert man die atmosphärischen Störungen mit Hilfe eines Längstwellenempfängers, so nimmt man bei einer Ausbreitung des Signals über die Bodenwelle ein kurzes Knacken wahr; alle Frequenzen erreichen gleichzeitig den Empfangsort, das dynamische Spektrum entspricht einer geraden Linie. Die untenstehenden Abbildungen zeigen an verschiedenen Tagen aufgenommene Sferics-Signale, die sich offensichtlich in ihrer Häufigkeit sowie Intensität unterscheiden.



**Abb. 1:** Blitzentladungen emittieren sehr breitbandige elektromagnetische Impulse im VLF-Bereich.



**Abb. 2:** Spektrogramm bei geringer Sferics-Aktivität



**Abb. 3:** Spektrogramm bei hoher Sferics-Aktivität

#### Aufgabe 1

1. Welche Unterschiede weisen die beiden Spektrogramme auf? Wodurch kommen die verschiedenen Sferics-Aktivitäten zustande?
2. Wie können Sie Ihre Antwort von Aufgabe 1 experimentell überprüfen?
3. Führen Sie, sofern Ihnen ein Sferics-Empfänger zur Verfügung steht, das Experiment durch und bestätigen Sie damit Ihre Antwort von Aufgabe 1.

## 7.2. Tweeks I: Abschätzung der zurückgelegten Wegstrecke

Analog zu Mittelwellensendern können sich auch Sferics durch Mehrfachreflexion in dem natürlichen Wellenleiter Erde-Ionosphäre ausbreiten (Abb. 1); die Reflexion an der Ionosphäre erfolgt dabei an der E-Schicht, welche in einer Höhe von 90 km beginnt (Tab. 1). Zur quantitativen Beschreibung des Wellenleiters kann in guter Näherung auf das Modell des planaren Hohlleiters – bestehend aus zwei ideal leitenden, parallel zueinander angeordneten Platten zwischen denen ein Vakuum herrscht – zurückgegriffen werden. Für dieses Modell ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v$  eines elektromagnetischen Signals frequenzabhängig und es gilt:

$$v(f) = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

( $c$  Lichtgeschwindigkeit im Vakuum,  $f_c$  Cut-off-Frequenz,  $f$  Signalfrequenz). Nahe der Grenzfrequenz des Wellenleiters fällt die Signalgeschwindigkeit stark ab, für höhere Frequenzen nähert sie sich der Lichtgeschwindigkeit. Das breitbandige Signal eines Sferics wird dadurch einer Dispersion unterzogen, was sich schallgewandelt durch ein Zirpen und im dynamischen Spektrum durch einen charakteristischen „Haken“ (blauer Kreis) zwischen 1,5 und 2 kHz äußert (Abb. 2).

### Aufgabe 2

Die nebenstehende Abbildung zeigt die Vergrößerung des „Hakens“ eines empfangenen Tweeks, dargestellt mit der Software Cool Edit Pro.

Bestimmen Sie unter Nutzung der angegebenen Gleichung für die frequenzabhängige Ausbreitungsgeschwindigkeit und mit Hilfe der Abb. 3 die vom empfangenen Signal zurückgelegte Wegstrecke (die auf der Abszisse abgetragene Zeit ist in der Einheit Sekunden dargestellt).

**Tipp:** Wie berechnet sich die Laufzeitdifferenz  $\Delta t$  zweier Signale unterschiedlicher Frequenz bei gleichem Ausbreitungsweg  $s$ ?

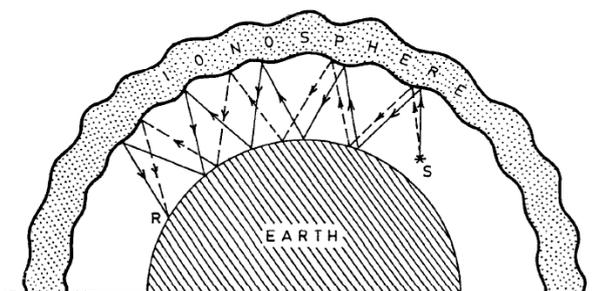


Abb. 1: Entstehung von Tweeks (Singh & Singh, 1996)

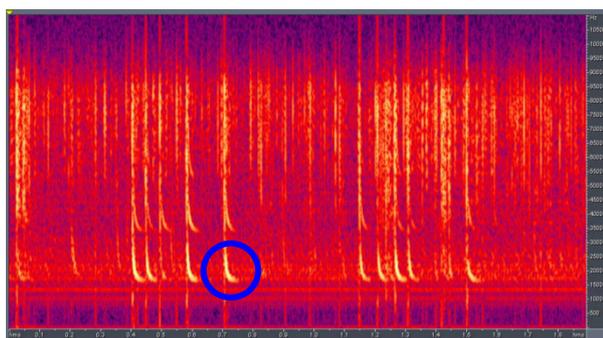


Abb. 2: Dynamisches Spektrum einer Folge von Tweeks

D-Region	$h \leq 90 \text{ km}$
E-Region	$90 \text{ km} \leq h \leq 170 \text{ km}$
F-Region	$170 \text{ km} \leq 1000 \text{ km}$

Tab. 1: Aufbau der Ionosphäre

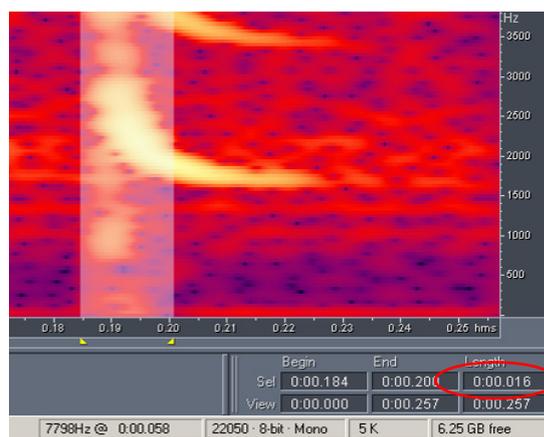


Abb. 3: Vergrößerung des „Hakens“ eines Tweeks

### 7.3. Tweeks II: Abschätzung der Reflexionshöhe

In einem planaren Wellenleiter können sich ausschließlich elektromagnetische Wellen ausbreiten, deren Wellenlängen  $\lambda$  höchstens dem doppelten Plattenabstand  $h$  entsprechen (Abb. 1). Es gilt also die Bedingung

$$\lambda \leq \lambda_G = \frac{2h}{n} \quad \text{bzw.} \quad f \geq f_c = \frac{n \cdot c}{2h} \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

( $\lambda_G$  Grenzwellenlänge,  $n$  Mode).

Wird die Cut-off-Frequenz  $f_c$  von der elektromagnetischen Welle überschritten, so erfährt sie eine ungedämpfte Ausbreitung. Frequenzen unterhalb von  $f_c$  klingen dagegen exponentiell ab.

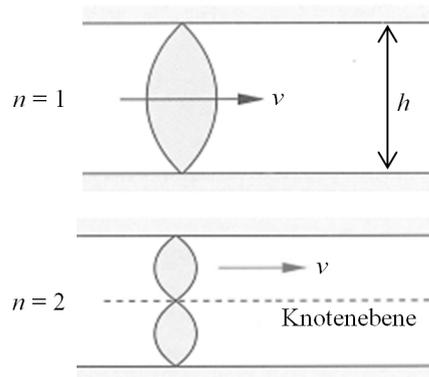


Abb. 1: Die Wellenlänge entspricht maximal dem doppelten Plattenabstand (Demtröder, 1999)

#### Aufgabe 3

1. Beim Beobachten der natürlichen atmosphärischen Impulsstrahlung fällt auf, dass Tweeks ausschließlich bei Nacht registriert werden können. Begründen Sie diese Beobachtung mit dem unterschiedlichen Aufbau der Ionosphäre bei Tag und Nacht.
2. Die nebenstehende Abbildung zeigt den zeitlichen Verlauf eines Tweeks, dargestellt mit der Software Cool Edit Pro [7]. Bestimmen Sie daraus und unter Nutzung der oben formulierten Gleichung die Reflexionshöhe des empfangenen Signals.
3. An welcher Ionosphärenschicht (7.2) werden Tweeks reflektiert? Stimmt Ihr Ergebnis aus Aufgabe 2 mit dem Literaturwert für die Höhe dieser Schicht überein?
4. Registrieren Sie, sofern Ihnen ein Sferics-Empfänger zur Verfügung steht, zu späten Abendstunden Tweeks und berechnen Sie daraus die vorliegende Reflexionshöhe.

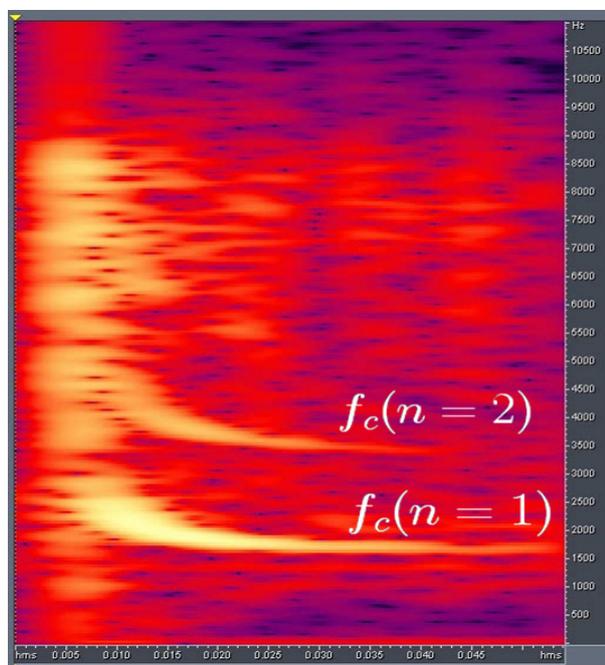


Abb. 2: Grenzfrequenzen der ersten beiden Moden

#### 7.4. Whistler: Dispersion, Emissionszeitpunkt und Feldlinienlänge

Der von einer Blitzentladung emittierte Sferic kann unter bestimmten Voraussetzungen durch die Ionosphäre laufen, sich entlang einer Kraftlinie des Erdmagnetfeldes ausbreiten und am magnetischen Konjugationspunkt des Emissionsortes empfangen werden (Abb. 1)<sup>1</sup>. Durch die Wechselwirkung der elektromagnetischen Welle mit aus dem Sonnenwind stammenden Plasmaelektronen unterliegt das Signal einem Dispersioneffekt, der sich in einer kontinuierlichen Abnahme der Frequenz äußert (Abb. 2). Schallgewandelt ähnelt das Signal daher einem Pfeifton fallender Frequenz, woraus sich die Bezeichnung „Whistler“ (von engl. to whistle = pfeifen) ableitet.

L. R. O. STOREY hat im Jahr 1953 erkannt, dass  $1/\sqrt{f}$  proportional ist zur Ankunftszeit  $t$  der einzelnen Frequenzen  $f$ . Die Whistler-Dispersion  $D$  ist dabei definiert als der reziproke Proportionalitätsfaktor. Es gilt also:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{1}{D} \cdot t \quad (t = 0 \text{ s stellt den Zeitpunkt der Blitzentladung dar.)}$$

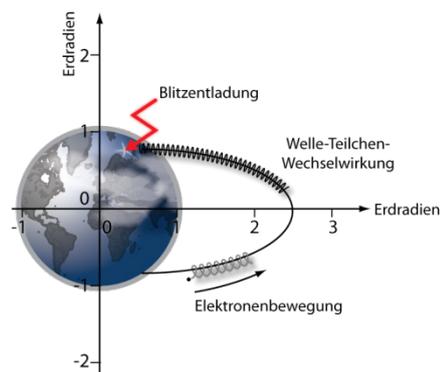


Abb. 1: Entstehung eines Whistlers

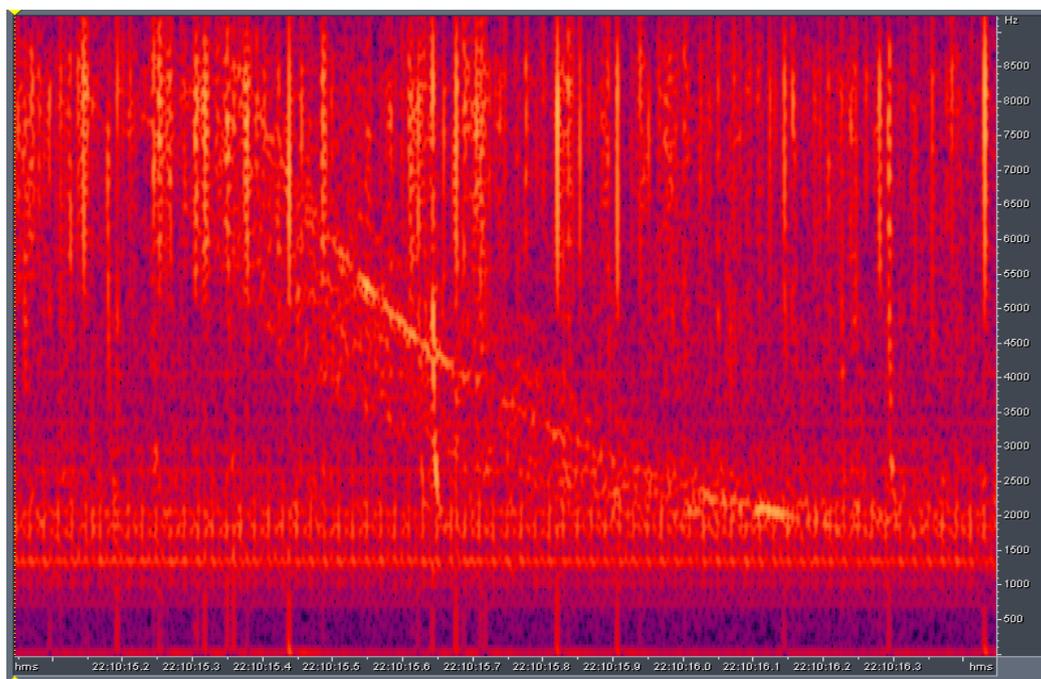


Abb. 2.: Spektrogramm eines Whistlers

#### Aufgabe 4

- Bestimmen Sie die Dispersion des in Abb. 2 dargestellten Whistlers sowie den Zeitpunkt der ihn verursachenden Blitzentladung.
- Die hohen Frequenzanteile des Whistlers breiten sich entlang der Magnetfeldlinie mit ca. einem Zehntel der Lichtgeschwindigkeit aus. Schätzen Sie mit dieser Geschwindigkeit und Ihrem Ergebnis aus Aufgabe 1 die Länge der Feldlinie am Beobachtungsstandort ab und vergleichen Sie diese mit dem auf Grundlage der Dipolapproximation bestimmten Zahlenwert (vgl. „Dipolapproximation des Erdmagnetfeldes“, 7.6).

<sup>1</sup>Weiterführende Informationen zur Ausbreitung geladener Teilchen in Richtung eines Magnetfeldes findet man unter [http://de.wikipedia.org/wiki/Magnetische\\_Flasche](http://de.wikipedia.org/wiki/Magnetische_Flasche), eine Animation zur magnetischen Flasche unter <http://www.physik.uni-wuerzburg.de/~reusch/uebungen/sosem2007/MFlasche.html>.

### 7.5. Whistler-Folgen: Quantitative Überprüfung des Entstehungsmechanismus

Beim Empfang langer Wellen kann gelegentlich eine Folge von Whistlern (whistler trains) beobachtet werden, deren Dispersionen kontinuierlich zunehmen (Abb. 2). Eine Erklärung hierfür liefert die folgende Betrachtung: Zündet z. B. am Punkt A ein Blitz (Abb. 1), so kann sich das emittierte Signal längs der Kraftlinie des Erdmagnetfeldes ausbreiten und am Punkt B (magnetischer Konjugationspunkt) als konventioneller Whistler (Short Whistler) empfangen werden. Ein Teil des Signals wird jedoch an der E-Schicht (7.2) reflektiert, gelangt zum Ausgangspunkt zurück und ist auch dort als Whistler mit entsprechend größerer Dispersion (Long Whistler) registrierbar. Der geschilderte Reflexionsprozess kann sich mehrfach wiederholen, wodurch am Emissionsort wie auch an dessen Konjugationspunkt eine Folge von Whistlern beobachtet werden kann.

Die Dispersionen verhalten sich zueinander wie die Ausbreitungswege, also wie  $2 : 4 : 6 : \dots$  (am Emissionsort) bzw. wie  $1 : 3 : 5 : \dots$  (am Konjugationspunkt).

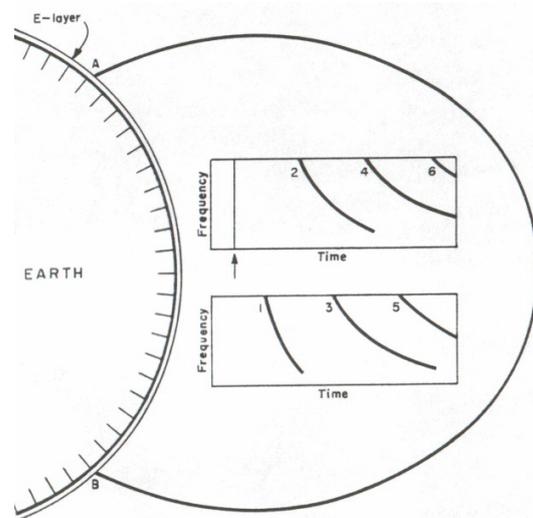


Abb. 1: Entstehung von Whistler-Folgen

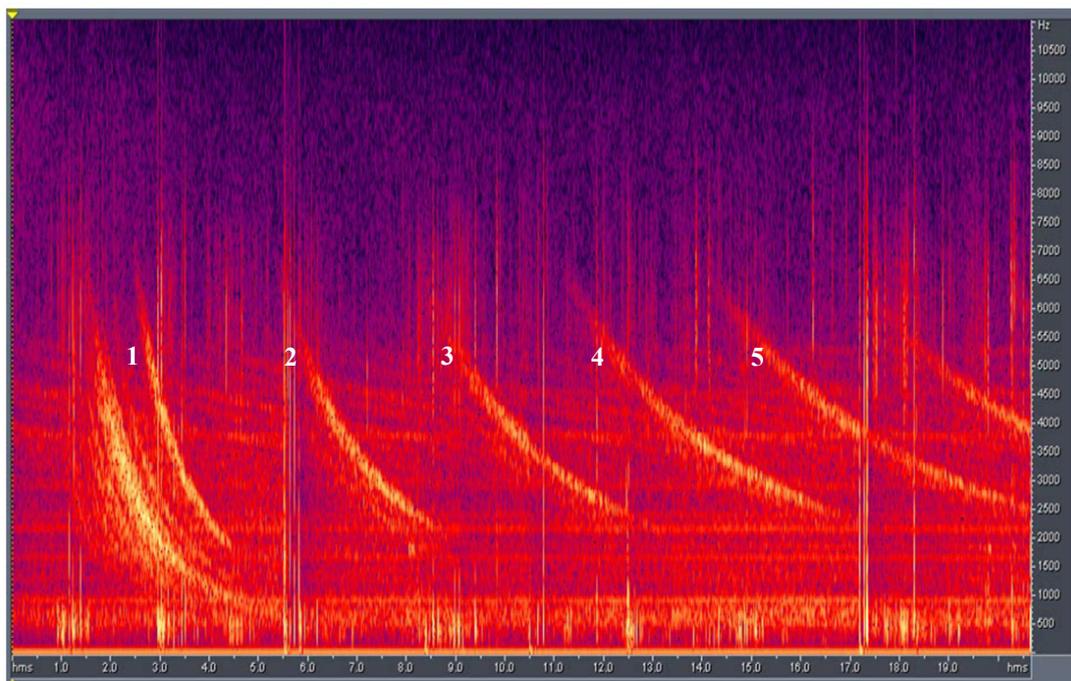


Abb. 2.: Spektrogramm einer Whistler-Folge

#### Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Dispersionen der einzelne Whistler für die in Abb. 2 dargestellte Folge und entscheiden Sie, ob das Signal am Ort der Blitzentladung oder auf der gegenüberliegenden Hemisphäre empfangen wurde.

## 7.6. Dipolapproximation des Erdmagnetfeldes<sup>1</sup>

### Aufgabe 6: Abschätzung charakteristischer Größen einer Feldlinie

#### 1. Berechnung des Äquatorialradius

Für die Dipolapproximation des Erdmagnetfeldes gilt die Feldliniengleichung

$$r(\varphi) = r_A \cdot \cos^2 \varphi,$$

wobei  $r(\varphi)$  der Abstand der Polarkoordinaten und  $r_A$  der Äquatorialradius, also die Entfernung vom Erdmittelpunkt zum Scheitelpunkt der Feldlinie darstellt (Abb. 1).  $\varphi$  ist die geomagnetische Breite, die im Rahmen der hier benötigten Genauigkeit gleich der geographischen Breite gesetzt werden kann (s. Teil 3 für eine Rechtfertigung dieser Annahme).

Wie weit ragt die Feldlinie für Ihren Beobachtungsstandort in den Weltraum hinein?

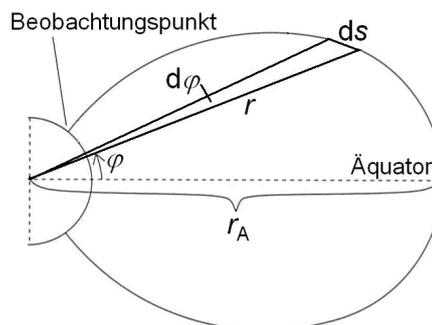


Abb. 1: Größen zur Beschreibung einer Feldlinie

#### 2. Abschätzung der Feldlinienlänge

Leiten Sie aus der Feldliniengleichung eine Beziehung für die Feldlinienlänge her und berechnen Sie diese unter Berücksichtigung Ihres Beobachtungsstandortes.

**Tipp 1 (Ansatz der Herleitung):** Für das infinitesimale Feldlinienelement  $ds$  gilt:

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi$$

**Tipp 2 (Vereinfachung):** Beachten Sie die folgende trigonometrische Vereinfachung:

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

**Tipp 3 (Überprüfung des Zwischenergebnisses):** Das Feldlinienelement  $ds$  ergibt sich zu:

$$ds = r_A \cos \varphi \sqrt{1 + 3 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

#### 3. Berechnung der geomagnetischen Breite

Für eine genauere Behandlung muss die Neigung des „Stabmagneten“ (Dipols) in der Erde gegenüber der Erdachse berücksichtigt werden, d. h. die geomagnetische statt der geographischen Breite eingesetzt werden. Für die geomagnetische Breite  $\varphi$  eines Beobachtungsortes gilt:

$$\sin \varphi = \sin \alpha_B \cdot \sin \alpha + \cos \alpha_B \cdot \cos \alpha \cdot \cos(\lambda - \lambda_B)$$

( $\alpha_B$  geographische Breite des borealen Inklinationspols ( $\alpha_B \approx 79^\circ$  N),  $\alpha$  geographische Breite des Beobachtungsortes,  $\lambda$  geographische Länge des Beobachtungsortes,  $\lambda_B$  geographische Länge des borealen Inklinationspols ( $\lambda_B \approx 70^\circ$  W)).

Zeigen Sie, dass zur Abschätzung des Äquatorialradius und der Feldlinienlänge diese Korrektur unberücksichtigt bleiben kann.

<sup>1</sup>Diese Aufgabe dient als Hintergrund für den Lehrer oder besonders interessierte Schüler.

## Hinweise zu den Aufgaben

### Aufgabe 1

#### Lösungen

1. Die unterschiedliche Sferics-Aktivität (unterschiedliche Sferics-Zahl pro Zeit und Amplituden) kommt durch Variation der Blitzhäufigkeit in einem Umkreis von 10 000 km (Reichweite der Sferics über die Bodenwelle) um den Empfangsort zustande.
2. Man untersucht die Sferics-Aktivität an verschiedenen Tagen und vergleicht diese mit den entsprechenden Blitzaktivitäten, die man aus Blitzkarten im Internet entnehmen kann.
3. Individuelle Lösung

#### Lehrplanbezug

- Erzeugung elektromagnetischer Strahlung
- Ausbreitung elektromagnetischer Wellen

#### Übergeordnete Kompetenzen<sup>1</sup>

Die Schülerinnen und Schüler ...

- stellen an einfachen Beispielen Hypothesen auf.
- planen Experimente, führen sie durch und dokumentieren die Ergebnisse.
- werten gewonnene Daten aus.

#### Internetquelle für Blitzkarten

<http://en.allmetsat.com/images/lightning-europe.php>

### Aufgabe 2

#### Lösung

Die Cut-off-Frequenz  $f_c$  des Wellenleiters beträgt ca. 1 600 Hz (Abb. 3). Wir betrachten im Folgenden die Laufzeitdifferenz  $\Delta t$  der beiden Frequenzen  $f_1 = 3\,500$  Hz und  $f_2 = 1\,700$  Hz; sie entspricht gerade der Dauer der Markierung und kann der Wertetabelle von Abb. 3 entnommen werden ( $\Delta t = 16$  ms, rote Ellipse). Es gilt:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = s \left( \frac{1}{v(f_2)} - \frac{1}{v(f_1)} \right) \text{ bzw. } s = \frac{v(f_1) \cdot v(f_2)}{v(f_1) - v(f_2)} \Delta t.$$

Mit der Gleichung für die frequenzabhängige Signalgeschwindigkeit erhält man  $v(f_1) \approx 0,89 c$  und  $v(f_2) \approx 0,34 c$ . Einsetzen der Zahlenwerte in die für den Ausbreitungsweg angegebene Berechnungsgleichung ergibt eine Distanz von ca. 2 600 km.

#### Lehrplanbezug

- Ausbreitung elektromagnetischer Wellen
- Reflexion elektromagnetischer Wellen
- Geschwindigkeit
- Dispersion

#### Übergeordnete Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler ...

- wählen Daten und Informationen aus verschiedenen Quellen zur Bearbeitung von Aufgaben und Problemen aus (hier: Datenentnahme aus einem Diagramm).
- wenden einfache Formen der Mathematisierung an.
- nehmen einfache Idealisierungen vor.
- führen Abschätzungen schwer zugänglicher Größen durch.

#### Literatur

Singh, A. K. & Singh, R. P. (1996): Propagational features of higher harmonic tweeks at low latitudes. In: Earth, Moon and Planets 73, 3, 277-290.

---

<sup>1</sup> Die Formulierung der Kompetenzen orientiert sich an den Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss.

### Aufgabe 3

#### Lösung

1. Da die Hauptursache für die Ausbildung der untersten Ionosphärenschicht (D-Schicht) die kurzwellige UV-Strahlung der Sonne darstellt, verschwindet die D-Schicht nach Sonnenuntergang. Dies ist der entscheidende Umstand im Ionosphärenaufbau, der das Ausbleiben von Tweeks am Tag erklärt: Aufgrund der hohen Neutralgasdichte in der D-Region stoßen die in einem elektrischen Feld beschleunigten freien Ladungsträger infolge der kleinen freien Weglänge häufig mit Neutralgasteilchen zusammen, wobei sie die aus dem Feld bezogene kinetische Energie verlieren; diese wird in Wärme umgewandelt. Rührt das vorliegende elektrische Feld von einer elektromagnetischen Welle her, so wird diese teilweise absorbiert. Im Gegensatz zu den höheren Ionosphärenschichten ist der Absorptionsgrad der D-Region sogar größer als dessen Reflexionsgrad. Dies erklärt u. a. den schlechteren Empfang eines weit entfernten Langwellensenders wie auch das Ausbleiben der Tweeks am Tag. Da die Ionisation der E-Schicht neben der UV-Strahlung auch durch energiereiche Teilchen und die weiche Röntgenstrahlung hervorgerufen wird, bildet sie sich bei Nacht nicht vollständig zurück, so dass die Tweeks an ihr reflektiert werden können.

2. Umstellen der Gleichung nach der Reflexionshöhe  $h$  und Einsetzen der Zahlenwerte ergibt:

$$h = \frac{n \cdot c}{2f_c} \approx \frac{3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}}{2 \cdot (1655 \pm 50) \text{ Hz}} \approx (88 \dots 93) \text{ km}$$

Die Cut-off-Frequenz  $f_c = (1655 \pm 50) \text{ Hz}$  wurde der Abb. 2 entnommen (für  $n = 1$ ).

3. Die Reflexion der Tweeks erfolgt an der unteren E-Region, die sich in einem Höhenbereich von 90-170 km erstreckt (Prölls, 2001). Der Vergleich mit dem Literaturwert zeigt, dass mit dem vorgestellten Verfahren die Ionosphärenhöhe unter Verwendung von Schulmitteln – einfacher und kostengünstiger Sferics-Empfänger – für Schulzwecke ausreichend genau bestimmt werden kann.
4. Individuelle Lösung

#### Lehrplanbezug

- Ausbreitung elektromagnetischer Wellen
- Reflexion elektromagnetischer Wellen
- Stehende Wellen

#### Übergeordnete Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler ...

- wählen Daten und Informationen aus verschiedenen Quellen zur Bearbeitung von Aufgaben und Problemen aus (hier: Entnahme der Cut-off-Frequenz aus dem Diagramm und Recherche der Ionosphärenhöhe bei Nacht)
- wenden einfache Formen der Mathematisierung an.
- nehmen einfache Idealisierungen vor.
- planen einfache Experimente, führen sie durch und dokumentieren die Ergebnisse.
- werten gewonnene Daten durch einfache Mathematisierungen aus.
- führen Abschätzungen schwer zugänglicher Größen durch.

#### Literatur

Demtröder, W. (1999): Experimentalphysik 2. Elektrizität und Optik. Berlin: Springer.

Kumar S., Kishore, A. & Ramachandran, V. (2008): Higher harmonic tweek sferics observed at low latitude: estimation of VLF reflection heights and tweek propagation distance. Ann. Geophys., 26, 1451-1459.

Prölls, G. W. (2001): Physik des erdnahen Weltraums. Berlin: Springer.

### Aufgabe 4

#### Lösung

1. Zur Bestimmung der Whistler-Dispersion werden zwei Wertepaare des Whistlers mit möglichst großer Zeitdifferenz der Abb. 2 entnommen, z. B.:  $t_1 \approx 22:10:15,5$  Uhr mit  $f_1 = 5\,300 \text{ Hz}$  und  $t_2 \approx 22:10:16,1$  Uhr mit  $f_2 = 2\,100 \text{ Hz}$ . Mit  $D = \frac{t_2 - t_1}{\frac{1}{\sqrt{f_2}} - \frac{1}{\sqrt{f_1}}}$  ergibt sich die Dispersion zu etwa  $74 \text{ s}^{\frac{1}{2}}$ .

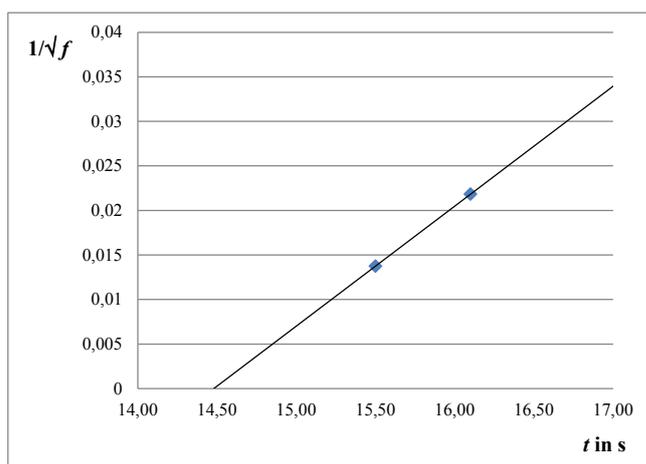
Die Steigung  $m$  der Geraden, die sich durch Abtragen von  $\frac{1}{\sqrt{f}}$  über  $t$  ergibt, beträgt  $0,013 \text{ s}^{\frac{1}{2}}$ , ihr  $y$ -Achsenabschnitt  $b$  ergibt sich zu

$$b = \frac{1}{\sqrt{f_1}} - m \cdot t_1 \approx -0,188 \text{ s}^{\frac{1}{2}}.$$

Dem Zeitpunkt der Blitzentladung entspricht der Schnittpunkt der Geraden  $\frac{1}{\sqrt{f}} = m \cdot t + b$  mit der  $t$ -Achse. Es gilt dann

$$0 = 0,013 \text{ s}^{\frac{1}{2}} \cdot t - 0,188 \text{ s}^{\frac{1}{2}}$$

bzw.  $t \approx 14,5$  s. Die Blitzentladung erfolgte also um 22:10:14,5 Uhr. Alternativ lässt sich der Emissionszeitpunkt auch grafisch bestimmen (vgl. nachfolgende Abbildung).



**Abb. 3:** Grafische Bestimmung des Zeitpunkts der Blitzentladung; er entspricht dem Schnittpunkt des Graphen mit der  $t$ -Achse, also 14,5 s.

- Die Frequenz  $f_1 = 5\,300$  Hz wurde um 22:10:15,5 Uhr auf der gegenüberliegenden Hemisphäre empfangen. Das heißt zur Ausbreitung entlang der Feldlinie benötigte das Signal ca. 1 s, woraus sich mit einer mittleren Ausbreitungsgeschwindigkeit von  $\frac{1}{10}c$  die Feldlinienlänge zu 30 000 km abschätzen lässt. Der Vergleich mit dem Ergebnis der Dipolapproximation ( $s = 29\,100$  km) zeigt, dass mit Hilfe eines registrierten Whistler-Signals sowie elementarer Schulmathematik der Sekundarstufe 1 die Feldlinienlänge erstaunlich genau ermittelt werden kann.

#### Lehrplanbezug

- Ausbreitung elektromagnetischer Wellen
- Geschwindigkeit
- Dispersion

#### Übergeordnete Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler ...

- wählen Daten und Informationen aus verschiedenen Quellen zur Bearbeitung von Aufgaben und Problemen aus (hier: Datenentnahme aus einem Diagramm).
- verwenden Analogien und Modellvorstellungen zur Wissensgenerierung.
- wenden einfache Formen der Mathematisierung an.
- nehmen einfache Idealisierungen vor.
- werten gewonnene Daten durch einfache Mathematisierungen aus.
- stellen Daten in einem Koordinatensystem dar und entnehmen dem Diagramm die entscheidenden Größen.
- führen Abschätzungen schwer zugänglicher Größen durch.

#### Literatur

Kertz, W. (1971): Einführung in die Geophysik II. Mannheim: Bibliographisches Institut.

### Aufgabe 5

#### Lösung

Zur Bestimmung der Whistler-Dispersionen entnimmt man der Abbildung für jeden Whistler zwei Wertepaare mit möglichst großen Zeitdifferenzen und setzt die Zahlenwerte in die Beziehung  $D = \frac{t_2 - t_1}{\frac{1}{\sqrt{f_2}} - \frac{1}{\sqrt{f_1}}}$  ein:

$$D = \frac{t_2 - t_1}{\frac{1}{\sqrt{f_2}} - \frac{1}{\sqrt{f_1}}}$$

Whistler i	$t_1$ in s	$f_1$ in Hz	$t_2$ in s	$f_2$ in Hz	$D_i$ in $\text{s}^{\frac{1}{2}}$	$D_i / D_1$
1	2,5	6 500	4,5	1 800	179	1
2	6,0	4 700	8,0	2 350	331	1,8
3	9,0	5 100	12,0	2 600	535	3,0
4	11,5	6 050	16,0	2 600	666	3,7
5	14,5	6 000	20,0	2 600	821	4,6

Tab. 1: Bestimmung der Whistler-Dispersionen

Die Whistler-Dispersionen verhalten sich näherungsweise zueinander wie 1 : 2 : 3 : 4 : 5, d. h. die Whistler-Folge wurde auf der Hemisphäre der Blitzentladung registriert. Ermittelt man die Dispersionen mittels linearer Regression (vgl. Kapitel 2), so verhalten sie sich nahezu exakt wie 1 : 2 : 3 : 4 : 5, für den Schulunterricht ist die hier dargestellte Abschätzung jedoch ausreichend.

Das Spektrogramm der Whistler-Folge wurde auf Grundlage einer WAV-Datei erzeugt, die auf einer CD des Arbeitskreises Amateurfunk und Telekommunikation in der Schule (AATIS) enthalten ist.

#### Lehrplanbezüge

- Ausbreitung elektromagnetischer Wellen
- Begriff der Dispersion

#### Übergeordnete Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler ...

- wählen Daten und Informationen aus verschiedenen Quellen zur Bearbeitung von Aufgaben und Problemen aus (hier: Datenentnahme aus einem Diagramm).
- verwenden Analogien und Modellvorstellungen zur Wissensgenerierung.
- wenden einfache Formen der Mathematisierung an.
- nehmen einfache Idealisierungen vor.
- werten gewonnene Daten durch einfache Mathematisierungen aus.

#### Literatur

Arbeitskreis Amateurfunk und Telekommunikation in der Schule (AATIS). Weiße AATIS-CD; <http://www.aatis.de> [Stand: 08/2010]

### Aufgabe 6

#### Lösungen

Die Lösungen erfolgen beispielhaft für den Beobachtungsstandort der Autoren (Landau i. d. Pfalz,  $\alpha \approx 49^\circ$  N und  $\lambda \approx 8^\circ$  O).

1. Die Entfernung vom Erdmittelpunkt zum Scheitelpunkt der Feldlinie entspricht dem Äquatorialradius  $r_A$ . Am Beobachtungsort ist  $r(\varphi)$  gleich dem Erdradius  $r_E$  ( $\approx 6378$  km), d. h.  $r_E = r_A \cdot \cos^2 \varphi_B$  bzw.

$$r_A = \frac{r_E}{\cos^2 \varphi_B} \quad (\varphi_B \text{ ist für eine erste Abschätzung die geographische Breite des Beobachtungsstandortes). \text{ Für}$$

Landau i. d. Pfalz ist  $r_A$  somit näherungsweise  $r_A \approx 2,3 \cdot r_E$  und beträgt ca. 14 700 km.

2. Die Feldlinienlänge  $s$  ergibt sich durch Integration längs ihres Weges, d. h.  $s = \int ds$ . Für das infinitesimale

Feldlinienelement  $ds$  gilt die Beziehung  $ds = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi$ , wobei  $r$  durch die Feldliniengleichung gegeben

ist. Differenzieren von  $r$  nach  $\varphi$  ergibt  $\frac{dr}{d\varphi} = -2r_A \cos \varphi \cdot \sin \varphi$  und nach Einsetzen in  $ds$  erhält man

$$ds = r_A \cos \varphi \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi + 3 \sin^2 \varphi} d\varphi. \text{ Die trigonometrische Vereinfachung } \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \text{ führt zu}$$

$ds = r_A \cos \varphi \sqrt{1 + 3 \sin^2 \varphi} d\varphi$  und schließlich zum Integral  $s = 2r_A(\varphi_B) \int_0^{+\varphi_B} \cos \varphi \sqrt{1 + 3 \sin^2 \varphi} d\varphi$ . Für den Standort

Landau i. d. Pfalz ( $\varphi_B \approx 0,86$ ) entspricht die numerische Lösung des Integrals einem Wert von ca. 0,94 und mit  $r_A = 2,3 \cdot r_E$  ist  $s \approx 2 \cdot r_A \cdot 0,94 \approx 2 \cdot 2,3 \cdot r_E \cdot 0,94 \approx 4,32 \cdot r_E$ . Einsetzen des Erdradius von 6 378 km ergibt eine Feldlinienlänge von ungefähr 27 600 km.

3. Mit  $\alpha \approx 49^\circ$  N und  $\lambda \approx 8^\circ$  O für den Beobachtungsstandort Landau i. d. Pfalz ergibt sich eine geomagnetische Breite von ca.  $50^\circ$  bzw. 0,87 im Bogenmaß. Damit berechnen sich der Äquatorialradius zu 15 300 km (statt 14 700 km) und die Feldlinienlänge zu 29 100 km (statt 27 600 km); die Abweichungen betragen somit ca. 5%, was für eine Abschätzung akzeptabel ist.

#### Lehrplanbezüge

- Erdmagnetfeld
- Magnetischer Dipol

#### Übergeordnete Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler ...

- verwenden Analogien und Modellvorstellungen zur Wissensgenerierung.
- wenden Formen der Mathematisierung an.
- nehmen Idealisierungen vor.
- führen Abschätzungen schwer zugänglicher Größen durch.

#### Literatur

Kertz, W. (1969): Einführung in die Geophysik I. Mannheim: Bibliographisches Institut.  
Prölss, G. W. (2001): Physik des erdnahen Weltraums. Berlin: Springer.