

Was man von zwei Qubits über Quantenphysik lernen kann: Verschränkung und Quantenkorrelationen

Wolfgang Dür*, Stefan Heusler⁺

* Institut für Theoretische Physik und Institut für Fachdidaktik, Bereich DINGIM, Universität Innsbruck, Österreich, wolfgang.duer@uibk.ac.at

⁺Institut für Didaktik der Physik, Universität Münster, Deutschland, stefan.heusler@uni-muenster.de

(Eingegangen: 05.07.2013; Angenommen: 20.03.2014)

Kurzfassung

In diesem Artikel wird der Zugang zur Quantenphysik über das einfachst mögliche Modellsystem, das Qubit, erweitert zu der Kombination von zwei Qubits. Dabei tritt das für die Quantenphysik zentrale Konzept der Verschränkung auf, welches nicht nur seltsame Eigenschaften der Quantenphysik illustriert, sondern auch der Schlüssel zum Verständnis von modernen Anwendungen der Quantenphysik ist. Ähnlich wie im Falle des einzelnen Qubits wird dabei versucht, die Grundprinzipien von Verschränkung und deren Anwendung mit Hilfe einfacher Mathematik und Bilder zu vermitteln, wobei Visualisierungen eine zentrale Rolle spielen. Während die mathematische Beschreibung vor allem für die Ausbildung an der Hochschule gedacht ist, können die Visualisierungen, insbesondere zum Messprozess an verschränkten Qubits, auch von interessierten Lehrern für den Unterricht genutzt werden. Die behandelten Themen umfassen verschränkte Zustände, Operationen und Messungen. Die möglichen physikalischen Realisierungen und Anwendungen, insbesondere im Bereich der Quanteninformation, werden hier kurz angesprochen, und in einer weiteren Publikation vertieft diskutiert.

1. Einleitung

Die Quantenphysik ist wohl eines der faszinierendsten Gebiete der Physik und gehört derzeit zu den aktivsten und fruchtvollsten Forschungsgebieten. Experimentelle Fortschritte der letzten Jahre erlauben es uns heute, Materie auf mikroskopischem Niveau mit unglaublicher Genauigkeit gezielt zu kontrollieren und zu manipulieren, was mit der Verleihung des Nobelpreises im Jahr 2012 an David Wineland und Serge Haroche gewürdigt wurde. Dabei können seltsam anmutende Quanteneigenschaften wie Überlagerungen von Zuständen, zufälliges Verhalten bei Messungen oder Verschränkung direkt beobachtet und sogar für Anwendungen genutzt werden. In diesem Sinne stellt die Quantenphysik nicht nur die Grundlage für moderne Schlüsseltechnologien dar, sondern prägt auch in einer herausragenden Weise unser Verständnis und unsere Sicht der Welt. Nicht zuletzt deshalb sollte die Quantenphysik in einer modernen Physikausbildung auch auf Schulniveau nicht fehlen.

Die unserer Alltagserfahrung widersprechenden Prinzipien und Konzepte sowie die abstrakte mathematische Darstellung der Quantenphysik stellen für die Behandlung im Schulunterricht allerdings eine große Herausforderung dar. Die Entwicklung von etablierten Unterrichtskonzepten zur Quantenphysik ist bei weitem nicht so weit fortgeschritten wie in anderen Bereichen, wie etwa der klassischen

Mechanik oder der Elektrodynamik. Häufig erfolgt der Zugang zur Quantenphysik auf dem „historischen Weg“, wobei Grundprinzipien der Quantenphysik anhand von Schlüsselexperimenten wie dem Doppelspaltversuch, dem Photoeffekt, dem Compton-Effekt oder dem Spektrum des Wasserstoffatoms illustriert werden [1]. Auch wenn ein solcher Zugang zweifellos seine Vorzüge und Stärken besitzt, stößt er unweigerlich an gewisse Grenzen: Zum Beispiel ist eine exakte, vollständig korrekte Behandlung des Wasserstoffatoms mit Mitteln der Schulmathematik kaum möglich – und damit ist auch ein tiefergehendes Verständnis der Quantenphysik nur schwer zu vermitteln.

In diesem Sinne ist unser Beitrag als Versuch zu verstehen, einen möglichen alternativen Zugang zur Quantenphysik über das einfachste und allgemeinste Modellsystem, dem Qubit, aufzuzeigen [2]. Dabei werden zentrale Prinzipien der Quantenphysik wie Überlagerungen, zufälliges Verhalten und Zustandsveränderungen bei Messungen mit Hilfe einfacher Mathematik und Bilder illustriert. Wir wollen ausdrücklich betonen, dass es sich bei der verwendeten Mathematik lediglich um Vektor- bzw. Matrizenrechnung handelt, und z. B. keine Differentialgleichungen verwendet werden müssen. Insofern ist der Formalismus sogar einfacher als die Newton'schen Bewegungsgleichungen. Die Komplexität kommt durch das konzeptionelle Verständnis, das zur Inter-

pretation der Ergebnisse nötig ist. Der hier vorliegende Beitrag stellt eine natürliche Fortsetzung dieses Zugangs dar, wobei nun nicht nur ein einzelnes Qubit im Mittelpunkt steht, sondern die Kombination von zwei Qubits. Dabei ergeben sich eine Vielzahl von neuen, interessanten Eigenschaften und Anwendungen – allen voran die quantenmechanische Verschränkung. Auch in diesem Fall ist für ein grundlegendes Verständnis Schulmathematik ausreichend. Darüber hinaus wird versucht, Zusammenhänge und Konzepte mit Hilfe von Visualisierungen greifbarer zu machen. Dennoch ist dieser Beitrag nicht für eine direkte Umsetzung im Schulunterricht gedacht, sondern richtet sich vielmehr an Studierende bzw. Hochschullehrer/innen der Physik, oder an interessierte Lehrkräfte, wobei insbesondere fachliche Hintergrundinformation bereitgestellt wird. Darüber hinaus sind auch Anregungen für die Umsetzung im Schulunterricht enthalten, insbesondere einzelne Visualisierungen bzw. die qualitative Behandlung von Verschränkung und ihren Anwendungen.

Der vorliegende Artikel basiert auf der Arbeit zu einem Qubit. Für ein besseres Verständnis empfiehlt sich somit vorab die Lektüre von [2]. Insbesondere verwenden wir die dort eingeführte Notation sowie die Resultate für das einzelne Qubit.

In der hier vorliegenden Arbeit wird zunächst ein zusammengesetztes klassisches System von zwei Bits behandelt (Kapitel 2), und darauf aufbauend zusammengesetzte Quantensysteme. Dabei werden Zustände von unabhängigen und verschränkten Quantensystemen eingeführt und verschränkte Zustände mittels einer verallgemeinerten Bloch-Kugel-Darstellung illustriert (Kapitel 3). Nach der Behandlung von Operationen (Kapitel 4) und Messungen von zwei Qubits (Kapitel 5.1-5.3) erfolgt eine ausführliche Diskussion der bei den Messungen auftretenden charakteristischen Korrelationen (Kapitel 5.4). Mögliche physikalische Realisierungen von Verschränkung und verschiedene Anwendungen wie z. B. die entfernte Zustandspräparation (als Vorstufe zur Teleportation), die Bell'sche Ungleichung bzw. die verschränkungs-basierte Quantenkryptographie werden in dieser Arbeit nur kurz behandelt (Kapitel 6). Eine ausführlichere Diskussion dieser Themenbereiche ist in einem zukünftigen Artikel [3] geplant.

2. Klassische Systeme – die Kombination von zwei Bits

Betrachten wir zunächst ein zusammengesetztes System aus zwei klassischen Bits. Ein klassisches Bit ist gegeben durch ein System mit einer charakteristischen Eigenschaft, die durch die Werte 0 bzw. 1 symbolisiert werden kann. Zwei Bits A und B sind dementsprechend zwei solche Systeme – sie entsprechen einem System mit zwei unterschiedlichen Eigenschaften A und B, die jeweils die Werte 0 bzw. 1 annehmen können. Die vier möglichen Zustände

des Gesamtsystems sind also gegeben durch 00, 01, 10 und 11 (siehe Abb. 1). So wie beim einzelnen Bit handelt es sich um ein abstraktes Objekt und es sind unterschiedliche physikalische Realisierungen möglich. Als Illustration können zwei Schalter dienen, die jeweils im Zustand „ein“ oder „aus“ sein können, aber auch zwei Bälle, die sich jeweils im oberen bzw. unteren Regal befinden können.

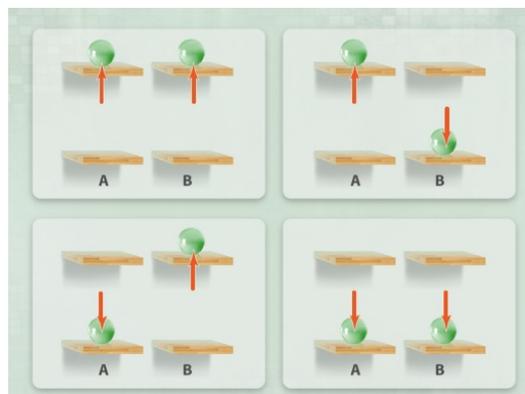


Abb. 1: Illustration von zwei klassischen Bits

Der Zustand des Gesamtsystems kann durch Auslesen der beiden Bitwerte bestimmt werden (Messung). Wichtig für die Informationsverarbeitung – z. B. in einem Computer – ist die Möglichkeit, die beiden Bitwerte durch logische Gatter zu verknüpfen. Interessant sind in diesem Zusammenhang das AND- bzw. OR-Gatter, aber auch das sogenannte XOR- bzw. CNOT-Gatter (CNOT = controlled NOT). Die Wirkung der entsprechenden Gatter ist in der folgenden Wertetabelle zusammengefasst. Aus diesen elementaren Gattern lassen sich bei Operationen auf mehreren Bits beliebige Abbildungen bzw. Rechnungen realisieren.

Bitwert x_A	Bitwert x_B	Ausgang AND	Ausgang OR	Ausgang XOR
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	0

Tab. 1: Wertetabelle für das AND, OR und XOR Gatter.

Wir wenden uns nun quantenmechanischen Systemen zu und betrachten die Beschreibung von Zuständen, Messungen und Operationen sowie die daraus resultierenden Eigenschaften.

3. Zustände von zwei Qubits

Zur Erinnerung sei angeführt, dass der Zustand eines Qubits durch eine beliebige Überlagerung der beiden Basiszustände $|0_z\rangle \equiv |0\rangle$ und $|1_z\rangle \equiv |1\rangle$ gegeben ist, $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, wobei α und β (komplexe) Koeffizienten mit $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ sind. Der Zustand eines einzelnen Qubits lässt sich mit Hilfe eines Spalten-

vektors $(\alpha, \beta)^T$ darstellen, wobei für eine kompakte Schreibweise die Darstellung des Spaltenvektors als transponierter Zeilenvektor erfolgt. Betrachtet man einen zweiten Zustand $|\phi\rangle = \gamma|0\rangle + \delta|1\rangle$, so kann man das Skalarprodukt (den „Überlapp“) zwischen den beiden Vektoren in folgender Form schreiben:

$$\langle\phi|\psi\rangle = (\gamma^*, \delta^*)(\alpha, \beta)^T = \gamma^* \alpha + \delta^* \beta. \quad \{1\}$$

wobei $\langle\phi|\psi\rangle = \gamma^* \langle 0| + \delta^* \langle 1| = (\gamma^*, \delta^*)$. Damit ergibt sich $\langle\psi|\psi\rangle = |\alpha|^2 + |\beta|^2$, wie auch in [2] gezeigt.

Man könnte nun glauben, dass der allgemeinste Zustand von zwei solchen Qubits dadurch gegeben ist, dass man allgemeine Zustände von Qubit A und Qubit B betrachtet. Ähnlich wie im Fall des einzelnen Qubits führt aber das Überlagerungsprinzip dazu, dass zahlreiche weitere Zustände mit interessanten Eigenschaften möglich sind. Es handelt sich dabei um gemeinsame Zustände der Qubits A und B – den sogenannten verschränkten Zuständen

3.1. Zustände von zwei unabhängigen Qubits

Betrachten wir aber zunächst zwei unabhängige Qubits $|\psi_A\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ und $|\psi_B\rangle = \gamma|0\rangle + \delta|1\rangle$. Der gemeinsame Zustand der beiden unabhängigen Qubits wird durch $|\Phi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$ beschrieben, wobei die Verknüpfung durch das sogenannte Tensorprodukt erfolgt. Die Verwendung des Tensorproduktes gewährleistet, dass die Linearität und damit das Superpositionsprinzip sowie die Wahrscheinlichkeitsinterpretation für jedes einzelne Qubit bewahrt bleiben. Operationen und Messungen der einzelnen Qubits sind bei einem Produktzustand unabhängig vom Zustand des zweiten Qubits, das heißt Messresultate werden nicht beeinflusst und auch der Zustand des zweiten Qubit bleibt unverändert.

Für die spätere Behandlung ist es wichtig, den Zustand des Gesamtsystems zu betrachten. Dieser wird durch einen vierdimensionalen, komplexen Vektor beschrieben, wobei die einzelnen Komponenten den Basiszuständen zugeordnet sind:

$$\begin{aligned} |0_z\rangle_A \otimes |0_z\rangle_B &\equiv |00\rangle = (1, 0, 0, 0)^T \\ |0_z\rangle_A \otimes |1_z\rangle_B &\equiv |01\rangle = (0, 1, 0, 0)^T \\ |1_z\rangle_A \otimes |0_z\rangle_B &\equiv |10\rangle = (0, 0, 1, 0)^T \\ |1_z\rangle_A \otimes |1_z\rangle_B &\equiv |11\rangle = (0, 0, 0, 1)^T \end{aligned} \quad \{2\}$$

Diese vier Basiszustände sind in Abb. 2 veranschaulicht. Für eine kompakte Notation wird das Tensorprodukt zwischen den beiden Zuständen oft weggelassen, also die Kurznotation

$$|00\rangle \equiv |0\rangle|0\rangle \equiv |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B \quad \{3\}$$

verwendet. Für den Zustand

$$|\Phi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle \quad \{4\}$$

ergibt sich der vierdimensionale komplexe Vektor

$$(\alpha, \beta)^T \otimes (\gamma, \delta)^T = (\alpha\gamma, \alpha\delta, \beta\gamma, \beta\delta)^T \quad \{5\}$$

$$|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ \alpha\delta \\ \beta\gamma \\ \beta\delta \end{pmatrix} \quad \{6\}$$

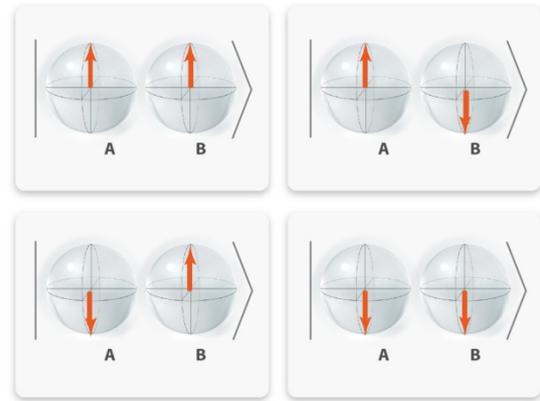


Abb. 2: Graphische Darstellung der Basiszustände von zwei Qubits

3.2. Allgemeine Zustände von zwei Qubits – Verschränkung

Ähnlich wie beim einzelnen Qubit gilt auch bei einem System von zwei Qubits das Überlagerungsprinzip. Neben den vier (klassischen) Basiszuständen und den Zuständen von zwei unabhängigen Qubits (Produktzustände) gibt es noch weitere Zustände, in denen sich ein Quantensystem befinden kann. Es sind nämlich beliebige Überlagerungen der vier Basiszustände

$$|\Phi\rangle = a_0|00\rangle + a_1|01\rangle + a_2|10\rangle + a_3|11\rangle \quad \{7\}$$

mit (komplexen) Koeffizienten a_i erlaubt, wobei die Normierungsbedingung

$$\langle\Phi|\Phi\rangle = \sum_{i=1}^3 |a_i|^2 = 1 \quad \{8\}$$

erfüllt sein muss. Dabei bezeichnet $\langle\Phi|\Phi\rangle$ das Skalarprodukt in dem nun vierdimensionalen komplexen Vektorraum.

Es lässt sich leicht überprüfen, dass es Zustände gibt, die nicht als Tensorprodukt von zwei unabhängigen Ein-Qubit-Zuständen darzustellen sind. Wir betrachten dazu den sogenannten Bell-Zustand

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \quad \{9\}$$

und versuchen, diesen als Produktzustand $(\alpha\gamma, \alpha\delta, \beta\gamma, \beta\delta)^T$ unter Berücksichtigung der Normierungsbedingungen darzustellen. Das Gleichungssystem

$$(\alpha\gamma, \alpha\delta, \beta\gamma, \beta\delta)^T = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1)^T \quad \{10\}$$

führt aber unmittelbar auf einen Widerspruch. Offensichtlich handelt es sich bei dem Bell-Zustand um einen Zustand, der nicht als Ansammlung von zwei unabhängigen Qubit-Zuständen betrachtet werden kann. Vielmehr muss der Zustand des Gesamtsystems, also beider Qubits gemeinsam, betrachtet werden. Ein solcher Zustand wird als verschränkter Zustand bezeichnet. Es handelt sich dabei um eine Überlagerung, bei der sich entweder beide Qubits im Zustand $|0\rangle$ oder beide Qubits im Zustand $|1\rangle$ befinden. Erst durch die Messung „zerfällt“ der verschränkte Zustand in zwei einzelne Qubits. Es entsteht somit eine besondere Korrelation zwischen den Messergebnissen bei den einzelnen Qubits. Solche verschränkten Zustände sind eine Besonderheit der Quantenmechanik, sie sind im Rahmen der klassischen Physik nicht möglich. Sie stellen das Kernstück vieler seltsamer nichtlokaler Effekte dar, spielen aber auch in modernen Anwendungen eine große Rolle. Interessant ist dabei insbesondere eine Situation, bei der sich die Qubits an unterschiedlichen Orten befinden. Dadurch ergeben sich nichtlokale Korrelationen, und die beiden Qubits verhalten sich so, „als ob sie voneinander wüssten“ – unabhängig davon, wie weit sie voneinander entfernt sind. Der Schlüssel zum Verständnis all dieser Phänomene ist es, die beiden Qubits nicht als separate Einheiten zu betrachten, sondern das Gesamtsystem der beiden Qubits und deren gemeinsamen Zustand. Das Bild von getrennten (klassischen) Objekten mit unabhängigen Eigenschaften muss also aufgegeben werden. In gewisser Weise handelt es sich bei den beiden Qubits um ein einziges Objekt. Wir werden dies später noch genauer diskutieren.

Weitere maximal verschränkte Zustände sind die drei Bell-Zustände [4]:

$$\begin{aligned} |\phi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \\ |\psi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \\ |\psi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \end{aligned} \quad \{11\}$$

Diese bilden zusammen mit dem Zustand $|\phi^+\rangle$ eine Basis für alle maximal verschränkten Zwei-Qubit-Zustände – die sogenannte Bell-Basis.

Darüber hinaus gibt es teilweise verschränkte Zustände, z. B. von der Form

$$|\psi\rangle = \cos \vartheta |00\rangle + \sin \vartheta |11\rangle. \quad \{12\}$$

Für $\theta = 0, \pi/2, \pi, \dots$ handelt es sich um Produktzustände, ansonsten um verschränkte Zustände. Wir werden im weiteren Verlauf aber insbesondere auf maximal verschränkte Zustände eingehen.

3.3. Visualisierung der Bell-Zustände

Im Fall eines einzelnen Qubits ist eine anschauliche und einfache Visualisierung mit Hilfe des Bloch-Kreises bzw. der Bloch-Kugel möglich, da ein Ein-Qubit-Zustand durch nur zwei reelle Parameter beschrieben werden kann (siehe [2]). Ein allgemeiner Quantenzustand von zwei Qubits hängt von insgesamt 6 reellen Parametern ab (vier komplexe Koeffizienten abzüglich der Normierung und einer globalen, physikalisch irrelevanten Phase). Dies macht eine anschauliche Betrachtung schwierig, da ein 6-dimensionaler Raum notwendig wäre. Man kann allerdings eine gewisse Subklasse von Zuständen, nämlich maximal verschränkte Zustände betrachten und für diese eine einprägsame grafische Veranschaulichung finden, die stark an der Bloch-Kugel des einzelnen Qubits orientiert ist.

Betrachten wir dazu zunächst den Bell-Zustand

$$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle). \quad \{13\}$$

Die beiden Qubits befinden sich jeweils in orthogonalen Zuständen: entweder das erste Qubit im Zustand $|0\rangle$ und das zweite Qubit im Zustand $|1\rangle$, oder umgekehrt. In der Bloch-Kugel-Darstellung sind die entsprechenden Zustandsvektoren immer antiparallel. Anstelle der Verwendung von zwei Bloch-Kugeln – für Qubit A und B – kann man also den gemeinsamen Zustand der beiden Qubits in *einer* Bloch-Kugel darstellen (siehe Abb. 3), wobei der Doppelpfeil die gleichmäßige Überlagerung der beiden möglichen Konfigurationen andeutet. Durch

den Doppelpfeil werden die Antipoden der Kugel miteinander identifiziert.

Ein ähnliches Bild kann man zur Veranschaulichung der Bell-Zustände $|\phi^+\rangle$ und $|\phi^-\rangle$ verwenden. Dazu benutzt man, dass diese Zustände auch in folgender Form geschrieben werden können:

$$\begin{aligned}
 |\phi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_x\rangle|1_x\rangle + |1_x\rangle|0_x\rangle) \\
 |\phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_y\rangle|1_y\rangle + |1_y\rangle|0_y\rangle)
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

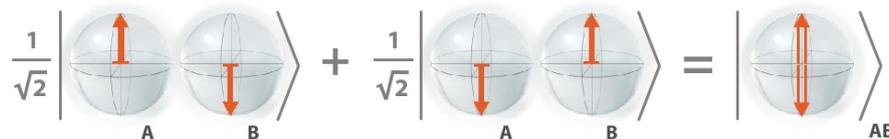


Abb. 3: Durch Superposition von $|01\rangle$ und $|10\rangle$ ergibt sich ein verschränkter Bell-Zustand.

Wir verwenden dabei die Eigenzustände der Pauli-Matrizen σ_x , σ_y bzw. σ_z . Daher ist

$$\begin{aligned}
 |0_x\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), & |1_x\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle), \\
 |0_y\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle), & |1_y\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle), \\
 |0_z\rangle &= |0\rangle, & |1_z\rangle &= |1\rangle,
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

wobei z. B. gilt: $\sigma_x |0_x\rangle = (+1)|0_x\rangle$ bzw. $\sigma_x |1_x\rangle = (-1)|1_x\rangle$. Dies lässt sich leicht durch Einsetzen und Ausmultiplizieren zeigen. Somit können wir auch diese beiden Bell-Zustände als gleichmäßige Überlagerung der beiden Konfigurationen von zwei antiparallelen Ein-Qubit-Zuständen auf der Bloch-Kugel betrachten und dementsprechend visualisieren (siehe Abb. 4).

Der antisymmetrische Singlet-Zustand $|\psi^-\rangle$ beschreibt ebenfalls eine Überlagerung von zwei anti-

parallelen Ein-Qubit-Zuständen auf der Bloch-Kugel, allerdings mit negativem Vorzeichen. Dies wird durch eine unterschiedliche Farbe der beiden Vektoren angedeutet. Man kann zeigen, dass der Singlet-Zustand als eine solche antisymmetrische Überlagerung in einer beliebigen Basis $\{|0_a\rangle, |1_a\rangle\}$ geschrieben werden kann,

$$\begin{aligned}
 |\psi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_a\rangle|1_a\rangle - |1_a\rangle|0_a\rangle)
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

In Abb. 4 ist dieser Sachverhalt visualisiert. Dies bedeutet aber, dass bei einem Singlet-Zustand alle Eigenschaften der beiden Qubits jeweils antikorreliert sind, solange beide Messungen in der gleichen Basis $\{|0_a\rangle, |1_a\rangle\}$ vorgenommen werden.

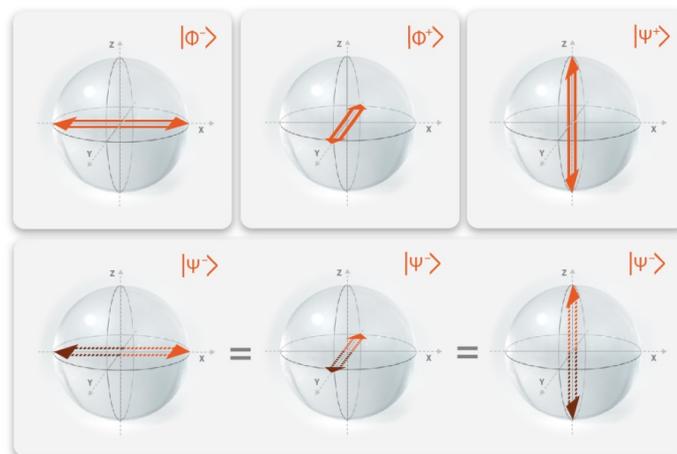


Abb. 4: Visualisierung der vier Bell-Zustände. Die Doppelpfeile identifizieren Antipoden auf der verallgemeinerten Bloch-Kugel. Jeder maximal verschränkte Zustand kann in der Bell-Basis beschrieben werden.

3.4 Teilweise verschränkte Zustände

Wir betrachten nun die Visualisierung von teilweise verschränkten Zuständen. Dazu verwenden wir, dass man mit Hilfe der Schmidt-Zerlegung jeden Zwei-Qubit-Zustand in einer Standardform darstellen kann. An den beiden Qubits wird jeweils eine lokale unitäre Operation (Drehung) durchgeführt, wodurch der Zustand in der Form

$$|\psi\rangle = \lambda_0 |0_a\rangle |1_b\rangle + \lambda_1 |1_a\rangle |0_b\rangle \quad \{17\}$$

geschrieben werden kann. Die Schmidt-Koeffizienten λ_0 und λ_1 sind reell und geben den Grad der Verschränkung des Zustands an. Es gilt $1/\sqrt{2} \geq \lambda_0 \geq \lambda_1$ und $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 = 1$. Die Verschränkung ist maximal für $\lambda_0 = 1/\sqrt{2}$ und sinkt mit wachsendem λ_0 .

Für den Fall $a = b$, also für den Fall, dass beide Qubits die gleiche Schmidt-Basis $\{|0_a\rangle, |1_a\rangle\}$ besitzen, lässt sich ein solcher Zustand mit einem ähnlichen Bild wie Abb. 4 illustrieren (siehe Abb. 5). Dabei wird der Grad der Verschränkung bzw. der Wert der Koeffizienten λ_0 und λ_1 durch die unterschiedliche Länge der Vektorpfeile visualisiert; die Schmidt-Basis ist durch die Orientierung der Doppelpfeile im Raum gegeben.

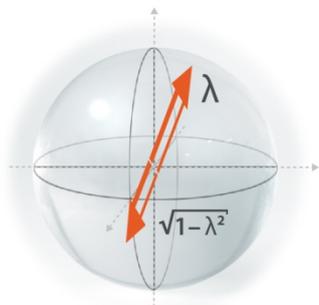


Abb. 5: Nicht vollständig verschränkter Zustand

4. Operationen an zwei Qubits

Wir beschäftigen uns nun mit der Manipulation von Zuständen bzw. deren zeitlichen Entwicklung. Im Fall eines einzelnen Qubits entspricht dies der Drehung des Zustandsvektors in der Bloch-Kugel. Diese wird durch eine unitäre Operation U beschrieben. Im Fall des einzelnen Qubits ist U eine 2×2 -Matrix aus der Gruppe $SU(2)$ mit der Eigenschaft

$$U^\dagger U = U U^\dagger = I,$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \{18\}$$

Für ein einzelnes Qubit ist der Zustand nach der Manipulation durch $U|\psi\rangle$ gegeben. Eine Drehung um die y -Achse um den Winkel $\gamma = \theta/2$ entspricht z. B. der Operation

$$U_y(\gamma) = \exp(i\gamma\sigma_y) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}. \quad \{19\}$$

Man erhält für den Ausgangszustand $|0\rangle$ den Zustand $U_y(\gamma)|0\rangle = \cos \gamma |0\rangle - \sin \gamma |1\rangle$ (siehe Abb. 6). Bei Zuständen haben wir unterschieden zwischen Produktzuständen, bei denen beide Qubits getrennt voneinander beschrieben werden, und verschränkten Zuständen, die beide Qubits als einen gemeinsamen Zustand beschreiben. Bei Operationen kann ganz analog unterschieden werden zwischen Operationen, die an beiden Qubits getrennt vorgenommen werden, und Operationen, die beide Qubits gemeinsam in einen anderen Zustand überführen.

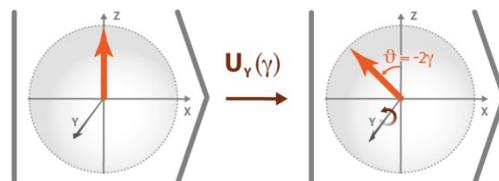


Abb. 6: Operation an einem einzelnen Qubit: Drehung um die y -Achse. Drehungen um andere Achsen können analog hierzu visualisiert werden.

4.1 Operationen an einzelnen Qubits

Wir beginnen mit solchen Operationen, die jedes Qubit einzeln manipulieren, unabhängig vom anderen Qubit. Dies führt zu einer Änderung der Basis für das einzelne Qubit, also jeweils einer unabhängigen Drehung. Mathematisch entspricht dies einer Operation durch zwei 2×2 -Matrizen der Form $U \otimes V$, d. h. einer unitären Operation U auf Qubit A und einer unitären Operation V auf Qubit B. Die Wirkung auf einen Produktzustand $|\phi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B$ ergibt sich dann zu

$$(U \otimes V) |\phi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B = U |\phi\rangle_A \otimes V |\psi\rangle_B. \quad \{20\}$$

Analog kann man die Wirkung der Operation $U \otimes V$ auf einen beliebigen Zwei-Qubit-Zustand untersuchen. Dazu muss man nur berücksichtigen, dass die Abbildung $U \otimes V$ einer Drehung der einzelnen Basisvektoren entspricht, also

$$U|0\rangle_A = |0_U\rangle_A, \quad U|1\rangle_A = |1_U\rangle_A, \quad \{21\}$$

und analog für Qubit B. Somit ergibt sich für einen allgemeinen Anfangszustand

$$|\Phi\rangle = a_0|00\rangle + a_1|01\rangle + a_2|10\rangle + a_3|11\rangle \quad \{22\}$$

der Endzustand nach der Operation

$$\begin{aligned} U \otimes V |\Phi\rangle = & \\ a_0 |0_U 0_V\rangle + a_1 |0_U 1_V\rangle & \quad \{23\} \\ + a_2 |1_U 0_V\rangle + a_3 |1_U 1_V\rangle & \end{aligned}$$

Da nur die lokale Basis der einzelnen Qubits geändert wurde, bleibt die Verschränkung des Zustands erhalten. Insbesondere werden Produktzustände immer auf Produktzustände abgebildet, ebenso wird ein maximal verschränkter Zustand wieder in einen maximal verschränkten Zustand überführt. Alternativ kann die Operation $U \otimes V$ als 4x4-Matrix geschrieben werden, wobei das Tensorprodukt für Matrizen analog zum Tensorprodukt für Vektoren definiert ist.

Wir betrachten insbesondere die Operation

$$S_z(\gamma) = U_z(\gamma) \otimes U_z(\gamma), \text{ wobei}$$

$$\begin{aligned} U_z(\gamma) = \exp(i\gamma\sigma_z) & \\ = \begin{pmatrix} \exp(i\gamma) & 0 \\ 0 & \exp(-i\gamma) \end{pmatrix}. & \quad \{24\} \end{aligned}$$

Dadurch wird ein Bell-Zustand der Form

$$\begin{aligned} |\phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_y\rangle|1_y\rangle + |1_y\rangle|0_y\rangle) \end{aligned} \quad \{25\}$$

auf den Zustand

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0_a 1_a\rangle + |1_a 0_a\rangle) \quad \{26\}$$

abgebildet, wobei

$$|0_a\rangle = U_z(\gamma)|0_y\rangle = e^{i\gamma}|0\rangle + e^{i\pi/2-i\gamma}|1\rangle \quad \{27\}$$

und

$$|1_a\rangle = U_z(\gamma)|1_y\rangle = e^{i\gamma}|0\rangle + e^{-i\pi/2-i\gamma}|1\rangle. \quad \{28\}$$

Dies kann als Drehung des Bell-Zustands in der verallgemeinerten Bloch-Kugel um den Winkel $\varphi = -2\gamma$ um die z-Achse interpretiert werden (siehe Abb. 7).

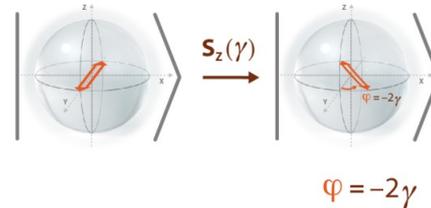


Abb. 7: Operation an einem Paar von verschränkten Qubits: Beide Qubits werden um den Winkel $\varphi = -2\gamma$ gedreht (S-Transformation). Drehungen um andere Achsen können analog hierzu visualisiert werden.

4.2 Gemeinsame Operation an zwei Qubits

Wir betrachten nun Operationen, die beide Qubits gemeinsam beeinflussen, und somit nicht nur eine Basistransformation beschreiben. Durch solche Operationen kann insbesondere auch ein Produktzustand zu einem verschränkten Zustand werden. Um eine solche Operation zu ermöglichen, ist eine Wechselwirkung zwischen den beiden Qubits notwendig. Auch hier handelt es sich wieder um unitäre Abbildungen, beschrieben durch 4x4-Matrizen.

Ein wichtiges Beispiel ist das sogenannte CNOT-Gatter, ein kontrolliertes NOT. Dieses ist durch folgende unitäre Abbildung gegeben

$$U_{CNOT} = \begin{matrix} & |00\rangle & |01\rangle & |10\rangle & |11\rangle \\ \begin{matrix} |00\rangle \\ |01\rangle \\ |10\rangle \\ |11\rangle \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad \{29\}$$

welche auch in der Form

$$\begin{aligned} U_{CNOT} &= |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes \sigma_x \\ &= |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 10| \end{aligned} \quad \{30\}$$

geschrieben werden kann. Dabei handelt es sich bei dem Objekt $|0\rangle\langle 0|$ um einen Projektor auf den Zustand 0, was in Matrixdarstellung der Matrix

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \{31\}$$

entspricht. Analog bedeutet $|0\rangle\langle 1|$, dass der Zustand $|1\rangle$ auf den Zustand $|0\rangle$ abgebildet wird, $|0\rangle\langle 1|1\rangle = |0\rangle$. Die Abbildungsmatrix für die Operation U_{CNOT} ist ebenfalls in der Standardbasis angegeben, d. h. es gilt

$$U_{\text{CNOT}} = \sum_{i,j,k,l} a_{ij,kl} |ij\rangle\langle kl|, \quad \{32\}$$

wobei $i, j, k, l = 0, 1$. Ist also das erste (Kontroll-) Qubit im Zustand 0, so bleibt das zweite (Ziel-) Qubit unverändert. Ist hingegen das erste Qubit im Zustand 1, so wird der Zustand des zweiten Qubits vertauscht. Dabei handelt es sich um ein verschränkendes Gatter. Wir betrachten dazu die Wirkung der unitären Operation auf einen Produktzustand der Form

$$|0_x\rangle|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle). \quad \{33\}$$

Unter Verwendung von

$$\begin{aligned} U_{\text{CNOT}}|00\rangle &= |00\rangle \text{ und} \\ U_{\text{CNOT}}|10\rangle &= |11\rangle. \end{aligned} \quad \{34\}$$

erhalten wir einen maximal verschränkten Zustand

$$U_{\text{CNOT}}|0_x\rangle|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle). \quad \{35\}$$

Mit Hilfe eines CNOT-Gatters kann also Verschränkung erzeugt werden! Im Labor werden verschränkte Zustände in vielen Systemen auf diese Weise realisiert. Zwei (oder mehrere) Qubits werden im Zustand $|0\rangle$ initialisiert und durch Anwendung einer Ein-Qubit-Rotation $|0\rangle \rightarrow |0_x\rangle$ und eines CNOT-Gatters verschränkt.

Im Rahmen der Quanteninformationsverarbeitung bzw. für Quantencomputer spielt das CNOT-Gatter eine herausragende Rolle. Gemeinsam mit Ein-Qubit-Drehungen ist das CNOT-Gatter universell. Das bedeutet, dass jede beliebige Operation auf n Qubits als Sequenz von Ein-Qubit-Gattern und paarweisen CNOT-Gattern realisiert werden kann.

Das CNOT-Gatter ist allerdings nicht die einzige verschränkende Operation. Ebenso können weitere Gatter, z. B. das kontrollierte Phasengatter

$$U_{\text{CP}} = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes \sigma_z. \quad \{36\}$$

zur Erzeugung von Verschränkung verwendet werden. Dieses Gatter kann (bis auf lokale Drehungen der einzelnen Qubits) durch eine Wechselwirkung

zwischen den beiden Qubits beschrieben werden. Dies entspricht dem Hamilton-Operator

$$H_z = \frac{1}{4}(I - \sigma_z) \otimes (I - \sigma_z) = |11\rangle\langle 11|. \quad \{37\}$$

Die unitäre Rotation ergibt sich zu

$$U_{\text{CP}} = e^{i\pi H_z} = \text{diag}(1, 1, 1, -1). \quad \{38\}$$

Dieser Operator beschreibt (bis auf zusätzliche Ein-Qubit-Drehungen um die z -Achse) eine Ising-Wechselwirkung der Form $H_z = \sigma_z \otimes \sigma_z$. Eine solche Wechselwirkung findet man z. B. bei der kontrollierten Kollision von kalten Atomen in einem optischen Gitter [6] oder bei Ionen unter Verwendung des sogenannten Moelmer-Soerensen-Gatters [7].

Bei Elektronenspins spielt die aus dem Pauli-Prinzip folgende Austauschwechselwirkung eine besondere Rolle. Das Pauli-Prinzip besagt, dass es für zwei benachbarte Spins energetisch günstiger ist, wenn sie sich in unterschiedlichen Zuständen befinden. Der zugehörige Hamilton-Operator ist durch

$$\begin{aligned} H_{\text{xyz}} &= \\ \frac{1}{2}(I \otimes I + \sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y + \sigma_z \otimes \sigma_z) \end{aligned} \quad \{39\}$$

gegeben. Auch mit dieser Wechselwirkung kann ein verschränkendes Gatter

$$U = e^{itH_{\text{xyz}}} \quad \{40\}$$

realisiert werden. Für $t = \pi/4$ erhält man ein maximal verschränkendes Gatter, für eine längere Wechselwirkungszeit $t = \pi/2$ ergibt sich (bis auf eine irrelevante Phase $-i$) das SWAP-Gatter

$$U_{\text{SWAP}} = (-i)e^{i\pi/2 H_{\text{xyz}}}, \quad \{41\}$$

wobei durch das SWAP-Gatter die Zustände der beiden Qubits vertauscht werden:

$$U_{\text{SWAP}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \{42\}$$

5. Messungen an zwei Qubits

Zunächst wiederholen wir die Messung am einzelnen Qubit, und verallgemeinern anschließend auf die Messung an einem Paar von Qubits.

Ein Qubit: Messung der Observablen σ_z

Im Falle eines einzelnen Qubits im Zustand $|\psi\rangle$ kann eine Eigenschaft mit zwei möglichen Messwerten gemessen werden. Die zu messende Eigenschaft wird durch die Angabe einer Observablen bzw. ihrer Eigenzustände bestimmt, was auf der Bloch-Kugel der Auswahl einer bestimmten Messrichtung entspricht (veranschaulicht durch einen „Schlitz“ in diese Richtung).

Als Beispiel sei die z -Messung angeführt, also die Messung der Observablen σ_z mit Eigenzuständen $|0\rangle$ bzw. $|1\rangle$ und zugehörigen Messergebnissen $+1$ („ $|0\rangle$ “) bzw. -1 („ $|1\rangle$ “). Die Observable σ_z kann somit in der sogenannten Spektraldarstellung geschrieben werden als

$$\sigma_z = (+1)|0\rangle\langle 0| + (-1)|1\rangle\langle 1|, \quad \{43\}$$

wobei die Eigenvektoren die Messrichtung und die Eigenwerte die möglichen Messergebnisse angeben. Alternativ erfolgt die Beschreibung der Messung durch Angabe der beiden Projektoren $P_0 = |0\rangle\langle 0|$ bzw. $P_1 = |1\rangle\langle 1|$. Bei der Messung erhält man ein zufälliges Ergebnis, wobei die Messwahrscheinlichkeit durch den Überlapp des Zustands mit den entsprechenden Eigenzuständen gegeben ist. Im Fall der z -Messung erhält man

$$\begin{aligned} p_0 &= \langle \psi | P_0 | \psi \rangle = |\langle 0 | \psi \rangle|^2, \\ p_1 &= \langle \psi | P_1 | \psi \rangle = |\langle 1 | \psi \rangle|^2. \end{aligned} \quad \{44\}$$

Der Zustand nach der Messung ist durch $|0\rangle$ bzw. $|1\rangle$ gegeben. Dies ist in Abb. 8 illustriert. Diese Darstellung einer Observablen in der Basis der Eigenvektoren zum Eigenwert $+1$ bzw. -1 werden wir nun auf den Fall von zwei Qubits verallgemeinern.

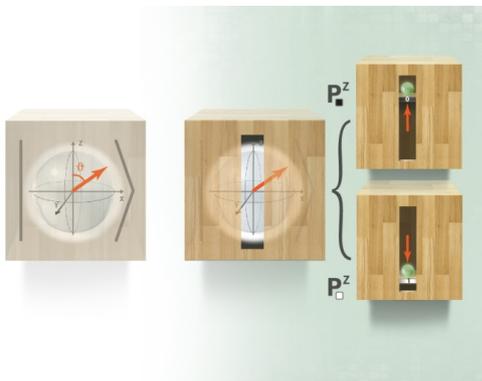


Abb. 8: Messung am einzelnen Qubit. Die „Schlitzrichtung“ bzw. Messbasis wird vom Detektor festgelegt.

5.1 Zwei Qubits: Messung der einzelnen Qubits

In ähnlicher Weise kann man nun die Messung eines einzelnen Qubits in einem Zwei-Qubit-Zustand behandeln. Auch dort wird nur eine Eigenschaft mit zwei möglichen Messwerten gemessen – das zweite Qubit wird noch nicht detektiert. Dies entspricht einer (tensoriellen) Multiplikation mit der Identitätsmatrix. Die formale Beschreibung der Messung erfolgt ganz analog wie im Fall des einzelnen Qubits, wobei allerdings das zweite Qubit mit berücksichtigt werden muss. Dies bewirkt, dass die entsprechenden Eigenvektoren jeweils zweifach entartet sind, und analog dass die Projektoren zugehörig zu den Messergebnissen $(+1)$ bzw. (-1) nun jeweils zweidimensional sind.

Betrachtet man z. B. die Messung der Observablen $\sigma_z \otimes I$, also eine z -Messung des ersten Qubits, während das zweite Qubit unbeeinflusst bleibt, so sind die entsprechenden Eigenräume zu den Eigenwerten $+1, -1$ entartet. Es gilt:

$$\sigma_z \otimes I = (+1)|0\rangle\langle 0| \otimes I + (-1)|1\rangle\langle 1| \otimes I. \quad \{45\}$$

Die Eigenzustände zum Eigenwert $+1$ bzw. -1 sind $\{|00\rangle, |01\rangle\}$ bzw. $\{|10\rangle, |11\rangle\}$, oder alternativ die zweidimensionalen Projektoren:

$$P_0 = |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| = |0\rangle\langle 0| \otimes I \quad \{46\}$$

$$P_1 = |10\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 11| = |1\rangle\langle 1| \otimes I. \quad \{47\}$$

Es erfolgt also eine Projektion des vierdimensionalen Zustandsvektors auf zweidimensionale Unterräume.

Die Wahrscheinlichkeit, das Messergebnis „ $|0\rangle$ “ ($+1$) bzw. „ $|1\rangle$ “ (-1) zu finden, ist durch $p_0 = \langle \psi | P_0 | \psi \rangle$ bzw. $p_1 = \langle \psi | P_1 | \psi \rangle$ gegeben. Zur Berechnung verwendet man folgende Beziehung:

$$\langle \psi | P_0 | \psi \rangle = \langle \psi | 00\rangle\langle 00 | \psi \rangle + \langle \psi | 01\rangle\langle 01 | \psi \rangle. \quad \{48\}$$

Der Zustand nach der Messung ist durch die Projektion auf den jeweiligen zweidimensionalen Unterraum gegeben, wobei der resultierende Zustand entsprechend normiert werden muss. Man erhält

$$|\psi_0\rangle = P_0 |\psi\rangle / \sqrt{p_0}, \quad |\psi_1\rangle = P_1 |\psi\rangle / \sqrt{p_1}.$$

Wieder verwendet man

$$\begin{aligned} P_0 |\psi\rangle &= |00\rangle\langle 00 | \psi \rangle + |01\rangle\langle 01 | \psi \rangle = \\ &= \psi_{00} |00\rangle + \psi_{01} |01\rangle, \end{aligned} \quad \{49\}$$

wobei $\psi_{00} = \langle 00 | \psi \rangle$ und $\psi_{01} = \langle 01 | \psi \rangle$ die entsprechenden Koeffizienten des Anfangszustands

$|\psi\rangle$ in der Standardbasis sind. Formal handelt es sich um die Multiplikation einer 4×4 -Matrix mit einem vierdimensionalen Vektor, wobei man als Ergebnis wieder einen vierdimensionalen Vektor erhält. Konkret projiziert man den ursprünglichen Vektor auf den durch den Projektor P_0 gegebenen zweidimensionalen Unterraum, wobei der resultierende Vektor anschließend noch auf die Länge 1 normiert werden muss.

Eine Messung des zweiten Qubits lässt sich auf analoge Weise beschreiben. Es müssen lediglich die Rollen von Qubit A und B vertauscht werden.

5.1.1 Messung in einer gedrehten Basis

Wir betrachten nun die Messung einer beliebigen Eigenschaft des Zustands, was im Ein-Qubit-Fall durch die Orientierung eines Schlitzes in eine beliebige Richtung visualisiert werden kann [2]. Formal ist die Messrichtung durch Angabe einer Observablen A mit den beiden senkrecht aufeinander stehenden Eigenzuständen $|0_a\rangle, |1_a\rangle$ gegeben, wobei $A|0_a\rangle = (+1)|0_a\rangle, A|1_a\rangle = (-1)|1_a\rangle$.

Eine Messung der Observablen A am ersten Qubit wird dann durch Angabe der Projektoren

$$\begin{aligned} P_0^a &= |0_a\rangle\langle 0_a| + |1_a\rangle\langle 1_a| = |0_a\rangle\langle 0_a| \otimes I, \\ P_1^a &= |1_a\rangle\langle 1_a| + |0_a\rangle\langle 0_a| = |1_a\rangle\langle 1_a| \otimes I \end{aligned} \quad \{50\}$$

beschrieben. Die Messwahrscheinlichkeiten und der Zustand nach der Messung errechnen sich wie oben angegeben, wobei sinngemäß P_0 durch P_0^a ersetzt wird. Jedenfalls ist festzuhalten, dass der Zustand des ersten Qubits nach der Messung durch $|0_a\rangle$ bzw. $|1_a\rangle$ gegeben ist. Das Gesamtsystem der beiden Qubits befindet sich nach der Messung in einem Produktzustand, ist also von der Form

$$|0_a\rangle \otimes |\chi_B\rangle \quad \{51\}$$

im Fall des Messergebnisses „ $|0_a\rangle$ “ – unabhängig davon, ob der Anfangszustand vor der Messung verschränkt war oder nicht. Es kommt also auch hier zu einer Veränderung des Zustands durch die Messung, wobei etwaige Überlagerungen und somit Verschränkung zwischen den Qubits durch die Messung zerstört werden.

5.1.2 Messung an einem Produktzustand

Wir betrachten nun eine z -Messung an einem Zwei-Qubit-System, das sich in einem Produktzustand befindet. Der Anfangszustand ist somit durch $|\psi\rangle = |\phi_A\rangle \otimes |\chi_B\rangle$ gegeben. In diesem Fall erhält man die gleichen Messwahrscheinlichkeiten wie bei einer Ein-Qubit-Messung am Ein-Qubit-Zustand $|\phi_A\rangle$. Auch der Zustand von Qubit A nach der Messung ist identisch (hier $|0\rangle$ bzw. $|1\rangle$), der Zustand

des zweiten Qubits bleibt unverändert. Man überprüft leicht, dass

$$|\psi_0\rangle = P_0 |\psi\rangle / \sqrt{p_0} = |0\rangle \otimes |\chi_B\rangle. \quad \{52\}$$

Eine Messung des zweiten Qubits kann in diesem Fall unabhängig erfolgen, wobei die entsprechenden Messwahrscheinlichkeiten und der Zustand des zweiten Qubits nach der Messung identisch mit einer Ein-Qubit-Messung ist. Die Messergebnisse der beiden Ein-Qubit-Messungen sind dabei unabhängig von Messungen auf dem jeweils anderen Qubit, also vollkommen unkorreliert.

5.2 Messung an einem verschränkten Zustand

Bei einem verschränkten Anfangszustand sieht die Sache allerdings anders aus. Betrachten wir dazu das Beispiel eines Zustands

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle) \quad \{53\}$$

und die z -Messung des ersten Qubits. Die Beschreibung der Messung erfolgt genau wie oben. Man findet, dass

$$P_0 |\phi^+\rangle = 1/\sqrt{2} |00\rangle. \quad \{54\}$$

Das heißt, dass die Wahrscheinlichkeit, das Ergebnis „ $|0_A\rangle$ “ (+1) zu finden, gegeben ist durch

$$p_0 = \langle \phi^+ | P_0 | \phi^+ \rangle = 1/2. \quad \{55\}$$

Der Zustand nach der Messung lautet

$$|\psi_0\rangle = P_0 |\psi\rangle / \sqrt{p_0} = |00\rangle. \quad \{56\}$$

Für das Messergebnis „ $|1_A\rangle$ “ (-1) ergibt sich analog:

$p_1 = 1/2$ und

$$|\psi_1\rangle = P_1 |\psi\rangle / \sqrt{p_1} = |11\rangle. \quad \{57\}$$

Das Messergebnis für die Messung des ersten Qubits ist also vollkommen zufällig. Eine analoge Analyse für eine Messung nur des zweiten Qubits liefert ebenfalls ein zufälliges Ergebnis.

Führt man allerdings eine Messung beider Qubits durch – also im Anschluss an die oben behandelte Messung des ersten Qubits eine z -Messung am zweiten Qubit –, so findet man ein erstaunliches Ergebnis: *Obwohl jede einzelne Messung ein zufälliges Ergebnis liefert, sind beide Messergebnisse immer identisch.* Das heißt: Immer dann, wenn die erste Messung das Ergebnis „ $|0_A\rangle$ “ liefert, ist auch das Ergebnis der zweiten Messung „ $|0_B\rangle$ “. Und immer dann, wenn die erste Messung das Ergebnis „ $|1_A\rangle$ “ liefert, ist auch das Ergebnis der zweiten Messung „ $|1_B\rangle$ “. Die Messergebnisse sind also perfekt korreliert. Dies lässt sich sofort aus obiger Analyse der ersten Messung ablesen. Durch die erste Messung wurde der Zustand des Gesamtsystems verändert. Es liegt nicht mehr der verschränkte Zustand $|\phi^+\rangle$ vor, sondern im Falle des Messergebnisses „ $|0_A\rangle$ “ der Zustand $|\psi_0\rangle = |00\rangle$. Es ist unmittelbar klar, dass eine z -Messung des zweiten Qubits in diesem Fall mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 das Ergebnis „ $|0_B\rangle$ “ liefert. Wichtig ist zu beachten, dass der Quantenzustand des Gesamtsystems durch die Messung verändert wird.

Betrachtet man den Zustand als ein Gesamtsystem, also als ein quantenmechanisches 4-Niveau-System, so ist diese Korrelation zwischen den Messergebnissen eigentlich nicht so erstaunlich. Es handelt sich schließlich um eine gleichmäßige Überlagerung der Zustände $|00\rangle$ und $|11\rangle$, also sind nur die Koeffizienten dieser beiden Basiszustände ungleich null. Die Betragsquadrate der Koeffizienten des Zustands entsprechen aber auch im Fall eines 4-Niveau-Systems den Wahrscheinlichkeiten, ein bestimmtes Messergebnis zu finden. Im Prinzip wären vier unterschiedliche Messergebnisse möglich („ $|00\rangle$ “, „ $|01\rangle$ “, „ $|10\rangle$ “ und „ $|11\rangle$ “). Allerdings ist die Wahrscheinlichkeit für die Messergebnisse „ $|01\rangle$ “ und „ $|10\rangle$ “ gleich null – was im Prinzip nichts anderes bedeutet, als dass die beiden Messapparate nie unterschiedliche Ergebnisse anzeigen werden. Die Messergebnisse „ $|00\rangle$ “ und „ $|11\rangle$ “ treten hingegen mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ auf. Seltsam wird es nur, wenn man die Aufteilung des Gesamtsystems in zwei Teilsysteme betrachtet, die sich an unterschiedlichen Orten befinden können. Dann scheint es, als ob eine unsichtbare Fernwirkung zwischen den Teilchen existiert, die Teilchen gewissermaßen wie durch einen unsichtbaren Faden verbunden sind und voneinander wissen. Die beiden Qubits sind also verschränkt. Diese Verschränkung ist eine der zentralen Eigenschaften der Quantenphysik und bildet den Kern des sogenannten EPR-Paradoxons. Die moderne Formulierung nach Bohm erfolgt mit Hilfe der hier diskutierten Qubit-Zustände und illustriert deutlich jene Eigenschaften der Quantenphysik, die Physikern wie Albert Einstein einfach nicht akzeptieren wollten bzw. konnten. Auch heute noch werden alternative Theorien entworfen und diskutiert, wobei allerdings die experimentellen Befunde ganz klar für die Quantenphysik sprechen. Auch wenn wir heute nicht

behaupten können, dass wir die Quantenphysik verstanden haben, so haben wir uns zumindest an sie gewöhnt. Wie werden auf das EPR-Paradoxon, alternative lokale Theorien mit versteckten Parametern und die damit verbundenen Limitierungen von Korrelationen sowie auf die Bell'sche Ungleichung später näher eingehen.

Die oben diskutierten Eigenschaften, insbesondere (perfekte) Korrelationen, sind nicht auf den $|\phi^+\rangle$ -Zustand beschränkt. Mit einer analogen Argumentation bzw. Rechnung kann man leicht zeigen, dass man für den Singlet-Zustand $|\psi^-\rangle$ immer unterschiedliche Messergebnisse – also perfekte Antikorrelation – erhält, wobei die Wahrscheinlichkeit für die einzelnen Messergebnisse jeweils $\frac{1}{2}$ beträgt. Einem einzelnen Qubit kann vor der Messung weder die Eigenschaft $|0\rangle$ noch $|1\rangle$ (positive oder negative z -Richtung) zugeordnet werden. Dies ist aber nicht nur für z -Messungen an den beiden Teilchen der Fall, sondern für die Messung einer beliebigen Eigenschaft (Observable) an beiden Teilchen. Bei der Messung einer beliebigen Observablen A an einem Qubit erhält man immer ein vollkommen zufälliges Ergebnis, also mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ das Ergebnis „ $|0_a\rangle$ “ und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ das Ergebnis „ $|1_a\rangle$ “. Wird an beiden Qubits aber die gleiche Observable A gemessen, also $A \otimes I$ und $I \otimes A$, so sind die Ergebnisse immer perfekt antikorreliert. Dies ist eine ganz erstaunliche Eigenschaft des Singlet-Zustands, die sich aber unmittelbar aus der bereits oben angeführten Darstellung des Singlet-Zustands als antisymmetrische Überlagerung zweier orthogonaler Zustände in einer beliebigen Basis ergibt (siehe Gleichung $\{1\}$).

Während es vielleicht nicht so überraschend ist, dass eine Eigenschaft (positive oder negative Orientierung in z -Richtung) bei den beiden Qubits übereinstimmt, so ist es doch äußerst erstaunlich, dass *alle* Eigenschaften der beiden Qubits übereinstimmen, obwohl diese für das einzelne Qubit jeweils vor der Messung gar nicht festgelegt waren!

Das Verhalten von verschränkten Zuständen unter Messungen und die dabei auftretenden Korrelationen kann durch Abb. 9 illustriert werden [5]. Dazu betrachten wir eine Münze, deren Seiten zwei senkrechten Zuständen entsprechen (antiparallel in der Bloch-Kugel-Darstellung). Eine Seite der Münze gehört zu Qubit A, die andere Seite der Münze zu Qubit B. Einen Produktzustand zweier senkrechter Zustände, z. B. den Zustand $|0\rangle|1\rangle$ kann man sich wie eine Münze vorstellen, die auf einem Glastisch liegt. Der Zustand des Qubits A entspricht der oberen Seite der Münze (Alice schaut von oben auf die Münze), der Zustand des Qubits B der unteren Seite der Münze (Bob schaut von unten auf die Münze). Liegt ein verschränkter Zustand vor, z. B.

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle), \quad \{58\}$$

so entspricht dies einer *rotierenden* Münze. Die Rotation symbolisiert die Überlagerung der beiden möglichen Konfigurationen der Münze (Kopf oben und Zahl unten bzw. umgekehrt), wobei aber beide Konfigurationen gleich wahrscheinlich sind – analog zu einem quantenmechanischen Überlagerungszustand. Erst bei einer Messung (= Beobachtung) kommt die Münze auf der einen oder anderen Seite zu liegen. Dabei ist es zufällig, welcher Zustand (Kopf oder Zahl bzw. ‚0‘ oder ‚1‘) sich für Alice ergibt. Auch aus der Sicht von Bob ergibt sich ein zufälliges Ergebnis. Allerdings findet Bob jeweils den zu Alice senkrechten Zustand – immer wenn Alice „Zahl“ findet, erhält Bob „Kopf“ und umgekehrt. Dies verdeutlicht den Zufallscharakter von Einzelmessungen, aber auch deren perfekte Korrelation.

Alice bzw. Bob können auch noch andere Eigenschaften messen (entsprechend der Wahl einer anderen Messbasis – z. B. der Observablen σ_x – bei Alice und Bob). Auch in diesem Fall sind diese Eigenschaften vor der Messung nicht festgelegt. Nach der Messung ergibt sich sowohl für Alice als auch für Bob ein zufälliges Ergebnis, wobei die Ergebnisse von Alice und Bob aber immer unterschiedlich – und zwar perfekt antikorreliert – sind. In diesem Sinne lässt sich das Bild der rotierenden Münze für den Singlet-Zustand für beliebige Messrichtungen verwenden. Auch bei unterschiedlichen Messrichtungen sind noch gewisse Korrelationen zwischen den Messergebnissen vorhanden. Diese sind umso stärker, je besser die Messrichtungen übereinstimmen. Im Gegensatz zu Messungen an orthogonalen Zuständen (die auf der Bloch-Kugel Antipoden entsprechen) führt die Messung von komplementären Observablen (also Messrichtungen, die in der

Bloch-Kugel im rechten Winkel aufeinanderstehen) zu vollkommen unkorrelierten Ergebnissen. Als Beispiel sei eine z -Messung an Qubit A und eine x -Messung an Qubit B angeführt: Die erste Messung liefert ein zufälliges Ergebnis, wobei der Zustand nach der ersten Messung je nach Messergebnis durch $|01\rangle$ bzw. $|10\rangle$ gegeben ist. Die anschließende x -Messung am zweiten Qubit liefert dann – in beiden Fällen – ebenfalls ein völlig zufälliges Ergebnis.

Für andere Bell-Zustände ist das Bild der rotierenden Münze auf die Messung einer fixen Eigenschaft beschränkt, wie man am Beispiel des $|\phi^-\rangle$ -Zustands sehen kann. Dieser besitzt bezüglich der σ_x -Messungen perfekte Antikorrelation, aber bezüglich einer σ_z -Messung perfekte Korrelation. Dieser Sachverhalt ist in Abb. 10 für den Zustand $|\phi^-\rangle$ illustriert. Messungen in der z -Basis zeigen eine perfekte Korrelation, was man aus der Darstellung

$$|\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \quad \{59\}$$

sehen kann. Messungen in der x -Basis führen zu perfekter Antikorrelation, da

$$|\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_x\rangle|1_x\rangle + |1_x\rangle|0_x\rangle). \quad \{60\}$$

Messungen in komplementären Basen (z bzw. x) führen zu unkorrelierten Ergebnissen.

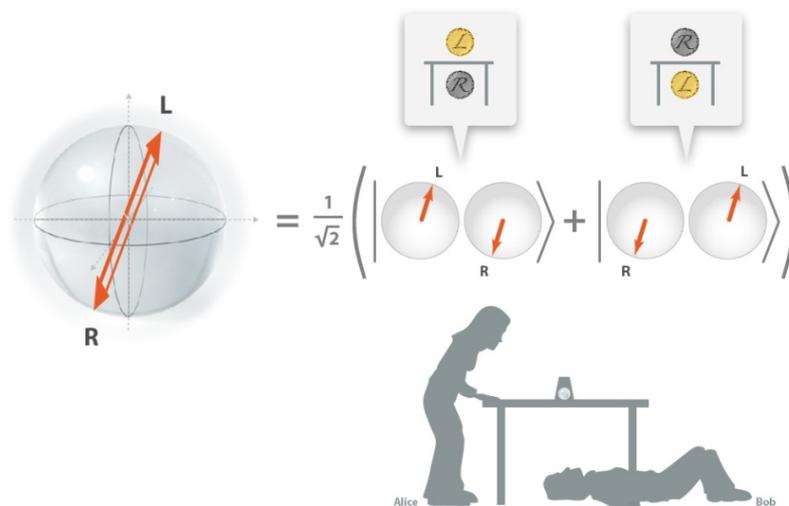


Abb. 9: Die „rotierende Münze“: Vor der Messung befindet sich die „Münze“ (alias das verschränkte Qubit-Paar) in einem Überlagerungszustand. Nach der Messung bzw. Wechselwirkung mit der Umgebung ist eine der beiden Möglichkeiten realisiert.

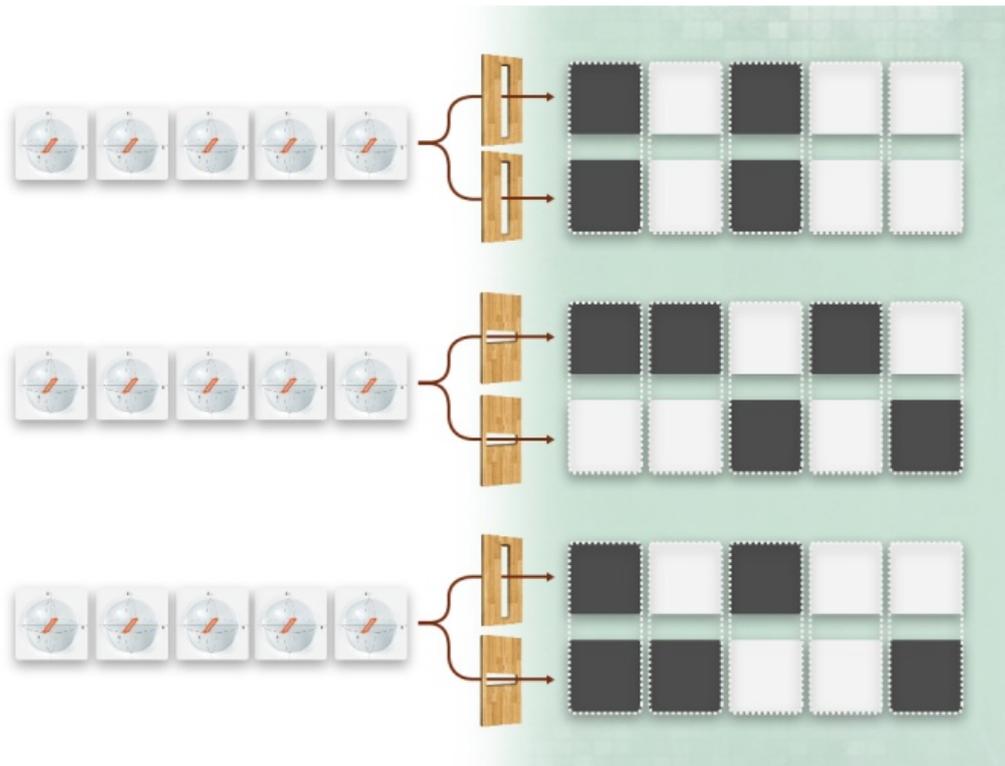


Abb. 10: Messungen beim verschränkten Qubit-Paar im Zustand $|\phi^-\rangle$. Während bei einer σ_z -Messung an den beiden Qubits immer zufällige, aber perfekt korrelierte Ergebnisse gefunden werden (oben), liefern σ_x -Messungen zufällige, aber perfekt antikorrelierte Ergebnisse (Mitte). Werden an den beiden Teilchen Messungen in orthogonalen Basen (also Messungen von unterschiedlichen Eigenschaften) durchgeführt, so sind die Ergebnisse zufällig und unkorreliert (unten).

5.3 Messungen des Gesamtsystems

Wir haben im vorherigen Abschnitt bereits angesprochen, dass man bei einem Zwei-Qubit-System nicht nur Messungen mit zwei möglichen Ergebnissen betrachten kann. Vielmehr kann man das Gesamtsystem der beiden Qubits auch als 4-Niveau-System auffassen. In einem solchen System sind nun auch Messungen mit vier möglichen Ergebnissen erlaubt. Solche vollständigen Messungen sind durch die Angabe von vier orthogonalen Zuständen, also durch Angabe einer Basis, charakterisiert. Dabei stellt man an das System die Frage, in welchem der vier möglichen Zustände es sich befindet.

Für eine kompakte Behandlung schreiben wir die vier Basiszustände als $|\varphi_i\rangle$, mit $i = 0, 1, 2, 3$. Jeder Zustand eines 4-Niveau-Systems kann als Überlagerung der vier Basiszustände geschrieben werden:

$$|\psi\rangle = a_0 |\varphi_0\rangle + a_1 |\varphi_1\rangle + a_2 |\varphi_2\rangle + a_3 |\varphi_3\rangle. \quad \{61\}$$

Bei Verwendung der Binärnotation und der Standard z -Basis ergibt sich z. B.

$$|\varphi_0\rangle = |00\rangle, |\varphi_1\rangle = |01\rangle, |\varphi_2\rangle = |10\rangle, |\varphi_3\rangle = |11\rangle. \quad \{62\}$$

Wie bei einer Messung am einzelnen Qubit ist auch in diesem Fall die Messwahrscheinlichkeit für das jeweilige Messergebnis durch das Betragsquadrat

des entsprechenden Koeffizienten gegeben. Das Messergebnis „ $|\varphi_i\rangle$ “ tritt also mit der Wahrscheinlichkeit

$$p_i = \langle \psi | \varphi_i \rangle \langle \varphi_i | \psi \rangle = |a_i|^2 \quad \{63\}$$

auf, wobei $i = 0, 1, 2, 3$. Der Zustand nach der Messung ist jeweils durch $|\varphi_i\rangle$ gegeben.

Wir weisen darauf hin, dass die obige Beziehung für jede beliebige Basis gilt; in jedem Fall handelt es sich um eine erlaubte – und auch mögliche – Messung.

Insbesondere kann es sich bei den Basisvektoren selbst auch um verschränkte Zustände handeln. Als wichtigstes Beispiel sei hierfür die sogenannte Bell-Messung angeführt, wobei die möglichen Messergebnisse durch die vier Bell-Zustände gegeben sind. Bis auf eine irrelevante Phase kann diese Basis kompakt in der Form

$$|\varphi_i\rangle = I \otimes \sigma_i |\phi^+\rangle \quad \{64\}$$

geschrieben werden, wobei

$$\sigma_0 = I, \sigma_1 = \sigma_x, \sigma_2 = \sigma_y, \sigma_3 = \sigma_z \quad \{65\}$$

die Pauli-Matrizen bezeichnen.

5.3.1 Kommutierende Observablen

Wir wollen noch kurz auf den Begriff von kommutierenden Observablen bzw. verträglichen (kompatiblen) Messungen eingehen. Ein Beispiel für solche kompatiblen Messungen haben wir bereits kennengelernt: getrennte Messungen der beiden Qubits. Charakterisiert ist eine solche Messung dadurch, dass die Reihenfolge der Messungen für das Ergebnis (genauer gesagt: für die auftretenden Wahrscheinlichkeiten) irrelevant ist. Die beiden Messungen fragen unterschiedliche Eigenschaften des Gesamtsystems ab, die unabhängig voneinander bestimmte Werte haben können. Im Fall der Einzel-Qubit-Messungen sind dies die Eigenschaften von Qubit A und Qubit B. Der Vollständigkeit halber sei noch angemerkt, dass sich durch Berechnung des Kommutators überprüfen lässt, ob zwei Observablen A und B kommutieren, also die Messungen verträglich sind. Dies ist der Fall wenn $[A, B] = AB - BA = 0$ gilt.

Beispiel 1: Messungen der einzelnen Qubits

Betrachten wir konkret den Fall von z -Messungen an den beiden Qubits. Die Messung $\sigma_z \otimes I$ an Qubit A hat zwei mögliche Ergebnisse: Das erste Qubit kann entweder im Zustand $|0_A\rangle$ oder im Zustand $|1_A\rangle$ sein. Die zweite Messung, $I \otimes \sigma_z$, bezieht sich auf eine andere, dazu kompatible Eigenschaft, nämlich den Zustand des zweiten Qubits. Auch dieser kann entweder $|0_B\rangle$ oder $|1_B\rangle$ sein, unabhängig davon, was der Wert der ersten Observablen ist. Eine der Messungen legt nur eine der beiden Eigenschaften fest. Erst wenn beide Messergebnisse bekannt sind, ist vollständig bestimmt, welcher der vier möglichen Zustände vorliegt. Formal wird das dadurch ausgedrückt, dass die Messungen der einzelnen Qubits durch zweidimensionale Projektoren beschrieben werden (siehe oben). Die Eigenzustände der Observablen sind jeweils zweifach entartet. Die erste Messung legt nun fest, in welchem der beiden zweidimensionalen Unterräume

$$P_0^A = |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| = |0\rangle\langle 0| \otimes I \quad \{66\}$$

$$P_1^A = |10\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 11| = |1\rangle\langle 1| \otimes I \quad \{67\}$$

sich das System befindet. Die zweite Messung legt fest, in welchen der beiden Räume

$$P_0^B = |00\rangle\langle 00| + |10\rangle\langle 10| = I \otimes |0\rangle\langle 0| \quad \{68\}$$

$$P_1^B = |01\rangle\langle 01| + |11\rangle\langle 11| = I \otimes |1\rangle\langle 1| \quad \{69\}$$

sich das System befindet. Es gilt, dass die paarweisen Produkte der zweidimensionalen Projektoren jeweils einen eindimensionalen Projektor bilden,

also einen Zustand eindeutig festlegen. Es gilt z. B. $P_0^A P_0^B = |00\rangle\langle 00|$. Dies wird in Abb. 11 illustriert.

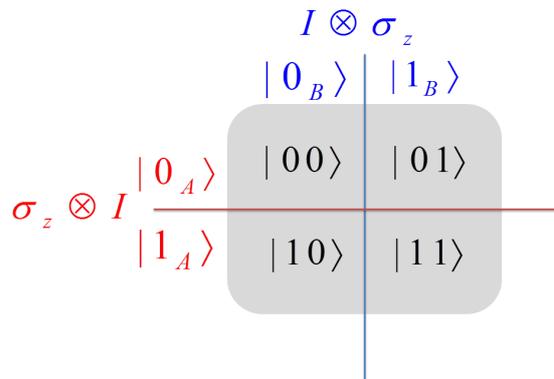


Abb. 11: Messung von kommutierenden Observablen. Die Reihenfolge der Messungen ist für das Ergebnis irrelevant.

Messungen von kommutierenden Observablen können nun analog betrachtet werden. Eine Observable legt eine Eigenschaft des Systems fest, die zweite Observable eine andere – davon unabhängige – Eigenschaft. Erst wenn beide Eigenschaften bekannt sind, ist der Zustand des Systems eindeutig bestimmt. Es sei nochmals daran erinnert, dass es auch unverträgliche Messungen gibt, die sich auf komplementäre Eigenschaften (also nicht kommutierende Observablen) beziehen. Bei einem einzelnen Qubit sind dies z. B. die Observablen σ_x und σ_z . Ein einzelnes Qubit kann nicht gleichzeitig die Eigenschaft einer fixen x - und z -Orientierung aufweisen.

Beispiel 2: Bell-Messung

Wir betrachten als weiteres Beispiel die Observablen $\sigma_z \otimes \sigma_z$ und $\sigma_x \otimes \sigma_x$. Diese beiden Observablen sind verträglich und charakterisieren zusammen eine Bell-Messung. Betrachten wir zunächst die Observable $\sigma_z \otimes \sigma_z$. Wie im Fall der Einzel-Qubit-Messungen findet man auch hier, dass es nur zwei Eigenwerte $+1$ und -1 gibt (und damit zwei mögliche Messergebnisse). Die zugehörigen Eigenräume sind jeweils wieder zweifach entartet und werden durch die Projektoren

$$P_\phi = |\phi^+\rangle\langle\phi^+| + |\phi^-\rangle\langle\phi^-| \quad \{70\}$$

(Eigenwert $+1$) bzw.

$$P_\psi = |\psi^+\rangle\langle\psi^+| + |\psi^-\rangle\langle\psi^-| \quad \{71\}$$

(Eigenwert -1)

beschrieben. In der Spektraldarstellung lässt sich $\sigma_z \otimes \sigma_z$ wie folgt schreiben:

$$\sigma_z \otimes \sigma_z = (+1)P_\phi + (-1)P_\psi. \quad \{72\}$$

Das Ergebnis der Messung gibt an, ob ein Φ^σ - oder ein Ψ^σ -Zustand vorliegt, ohne dass σ bestimmt werden kann.

Die Observable $\sigma_x \otimes \sigma_x$ hingegen ist durch Projektoren

$$P_+ = |\phi^+\rangle\langle\phi^+| + |\psi^+\rangle\langle\psi^+| \quad (\text{Eigenwert } +1) \text{ bzw.}$$

$$P_- = |\phi^-\rangle\langle\phi^-| + |\psi^-\rangle\langle\psi^-| \quad \{73\}$$

(Eigenwert -1) beschrieben. Auch hier gibt es zwei mögliche Messergebnisse, und die zugehörigen Eigenvektoren sind zweifach entartet. Das Ergebnis dieser Messung gibt an, ob ein Zustand $\sigma = +$ oder $\sigma = -$ vorliegt, ohne Information darüber zu liefern, ob es sich um einen Φ - oder einen Ψ -Zustand handelt. Gemeinsam wird dann einer der vier Bell-Zustände festgelegt. So entspricht z. B. die Projektion $P_\Phi P_+$ einer Projektion auf den Zustand $|\phi^+\rangle$, $P_\Phi P_+ = |\phi^+\rangle\langle\phi^+|$.

Beispiel 3: Gesamtdrehimpuls und z-Komponente des Drehimpulses

In der Quantenphysik spielen der Drehimpuls und die Addition von Drehimpulsen eine wichtige Rolle. Wir wollen dies hier anhand der zwei Qubits (Spins) illustrieren. Wir betrachten dazu die beiden kommutierenden Observablen

$$\mathbf{S}_z = (\sigma_z \otimes I + I \otimes \sigma_z) / 2 \quad \{74\}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^2 &= (I \otimes I) / 2 + \\ (I \otimes I + \sigma_x \otimes \sigma_x + \\ \sigma_y \otimes \sigma_y + \sigma_z \otimes \sigma_z) / 4, \end{aligned} \quad \{75\}$$

die gemeinsam eine vollständige Messung beschreiben. Dabei entspricht \mathbf{S} (bis auf das Planck'sche Wirkungsquantum \hbar) dem Gesamtdrehimpuls der beiden Teilchen, und \mathbf{S}_z der z-Komponente. Man findet, dass die Eigenwerte (d. h. die möglichen Messergebnisse) der Observablen \mathbf{S}^2 durch 0 bzw. +1 gegeben sind, wobei die zugehörigen Eigenräume einfach bzw. dreifach entartet sind. Es gilt also:

$$\mathbf{S}^2 = (0)P_S + (+1)P_T. \quad \{76\}$$

$P_S = |\psi^-\rangle\langle\psi^-|$ entspricht der Projektion auf den (antisymmetrischen) Singlet-Zustand, während $P_T = |\psi^+\rangle\langle\psi^+| + |00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|$ die Projektion auf den (symmetrischen) Raum der Zustände mit Gesamtspin 1, der sogenannten Triplet-Zustände, bezeichnet.

Die Observable \mathbf{S}_z besitzt Eigenwerte $-1, 0, +1$, die respektiv einfach, zweifach und einfach entartet

sind. Die zugehörigen Eigenzustände sind durch $|11\rangle, \{|\psi^+\rangle, |\psi^-\rangle\}$ bzw. $|00\rangle$ gegeben. Es gilt daher:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_z &= (-1)|11\rangle\langle 11| + (0)(|\psi^+\rangle\langle\psi^+| + \\ &|\psi^-\rangle\langle\psi^-|) + (+1)|00\rangle\langle 00| \end{aligned} \quad \{77\}$$

Durch Angabe des Gesamtspins S sowie der z-Komponente m (Eigenwerte von \mathbf{S}_z) wird also eine vollständige Messung beschrieben. Die gemeinsamen Eigenvektoren $|S, m\rangle$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned} |0, 0\rangle &= |\psi^-\rangle; \\ |1, -1\rangle &= |11\rangle, |1, 0\rangle = |\psi^+\rangle, |1, 1\rangle = |00\rangle. \end{aligned} \quad \{78\}$$

Damit sieht man, dass auch mit asymmetrischen Aufteilungen des vierdimensionalen Raums vollständige Messungen beschrieben werden können. Das hier beschriebene Prinzip – das Quadrat des Gesamtdrehimpulses und die z-Komponente des Gesamtdrehimpulses stellen kommutierende Observablen dar – spielt bei der Addition von Drehimpulsen (z. B. bei der Spin-Bahn-Kopplung im Wasserstoffatom) eine wichtige Rolle. Damit lässt sich gemeinsam mit den Quadraten der ursprünglichen Drehimpulse eine vollständige Messung konstruieren bzw. der zugehörige Hamilton-Operator diagonalisieren.

5.4 Korrelation der Messergebnisse

Wir haben bereits den Begriff „Korrelationen“ verwendet, ohne ihn jedoch präzise zu definieren. Im Fall von „maximalen“ bzw. gar keinen Korrelationen ist auch intuitiv klar, was damit gemeint ist. Für den Fall von teilweisen Korrelationen betrachtet man einerseits die Erwartungswerte der gemeinsamen Messung und andererseits die Korrelationsfunktion bzw. im klassischen Fall den sogenannten Korrelationskoeffizienten.

Dabei geht es anschaulich um die Rate der Übereinstimmungen der Messergebnisse. Dies ist in Abb. 12 für verschiedene Messungen an den beiden Teilchen eines verschränkten Zustands illustriert. Das Experiment wird N Mal wiederholt und die entsprechenden Messergebnisse werden aufgezeichnet. Messergebnisse $+1$ bzw. -1 entsprechen den schwarzen bzw. weißen Kästchen. Liegt eine Übereinstimmung bei der entsprechenden Messung vor, wird dies durch ein weißes bzw. schwarzes Kästchen angedeutet (beide Ergebnisse $+1$ bzw. beide Ergebnisse -1). Bei unterschiedlichen Werten ergibt sich ein graues Kästchen. Sind nun alle Kästchen schwarz oder weiß, so besteht perfekte Korrelation. Sind alle Kästchen grau, liegt perfekte Antikorrelation vor. Ist die Summe der weißen und schwarzen Kästchen

gleich der Anzahl der grauen Kästchen, sind die Ergebnisse unkorreliert. Gibt es mehr graue Kästchen als weiße/schwarze Kästchen, liegt eine teilweise Antikorrelation vor. Durch Abzählen der Kästchen lässt sich also ein (experimenteller) Korrelationskoeffizient ermitteln.

Wir wollen diese intuitive Herangehensweise nun formalisieren. Dazu betrachten wir zunächst die Messungen von einer Observable O_A an einem einzelnen Qubit A. Das Ergebnis „+1“ tritt mit der Wahrscheinlichkeit p_+ auf, das Ergebnis „-1“ mit der Wahrscheinlichkeit p_- . Betrachtet man nun N Wiederholungen des Experimentes, so wird m Mal das Ergebnis +1 auftreten, und $N-m$ Mal das Ergebnis -1. Die relative Häufigkeit, m/N bzw. $(N-m)/N$ entspricht für große N den Wahrscheinlichkeiten p_+ bzw. p_- . Der Erwartungswert $\langle O_A \rangle_\phi$ dieser Observablen bezüglich eines Zustands $|\phi\rangle$ ist gegeben durch $\langle O_A \rangle_\phi = \langle \phi | O_A | \phi \rangle = p_0(+1) + p_1(-1)$ und gibt an, wie zufällig das Ergebnis ist bzw. welches Ergebnis häufiger „zu erwarten“ ist. Ein Erwartungswert 0 entspricht einem zufälligen Ergebnis, während eine Erwartungswert von +1 einer Messwahrscheinlichkeit $p_+=1$ entspricht, also einem deterministischen Messergebnis.

Wir betrachten nun analog dazu die Messung der Observablen O_A am Qubit A, und der Observable O_B am Qubit B, wobei ein Zwei-Qubit-Zustand $|\psi\rangle$ vorliegt. Die Messung $O_A \otimes O_B$ hat vier mögliche Ergebnisse: $(+1_A, +1_B)$ (Wert +1), $(+1_A, -1_B)$ (Wert -1), $(-1_A, +1_B)$ (Wert -1), und $(-1_A, -1_B)$ (Wert +1), mit den Wahrscheinlichkeiten p_{++}, p_{+-}, p_{-+} und p_{--} . Dadurch ergibt sich der Erwartungswert

$$E_\psi(O_A, O_B) = \langle O_A \otimes O_B \rangle_\psi = \langle \psi | O_A \otimes O_B | \psi \rangle = p_{++}(+1) + p_{+-}(-1) + p_{-+}(-1) + p_{--}(+1). \quad \{79\}$$

Die Korrelationsfunktion ist definiert als

$$K_\psi(O_A, O_B) = \langle O_A \otimes O_B \rangle_\psi - \langle O_A \otimes I \rangle_\psi \langle I \otimes O_B \rangle_\psi. \quad \{80\}$$

Das entspricht den Korrelationen bei einer gemeinsamen Messung, abzüglich der Korrelationen der unabhängigen Einzelmessungen.

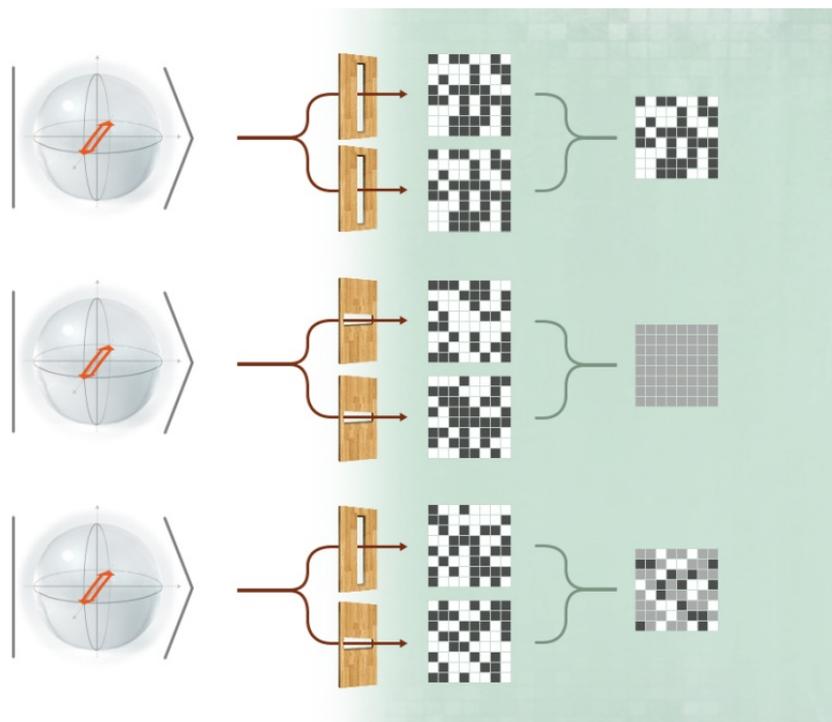


Abb. 12: Korrelationen beim verschränkten Qubit-Paar im Zustand $|\phi^-\rangle$ (vergleiche Abb. 10). Weiße/schwarze Kästchen entsprechen nach Überlagerung der Zufallsmuster von identischen Messergebnissen, während graue Kästchen unterschiedliche Messergebnisse darstellen.

5.4.1 Beispiele

Im Falle eines Produktzustands, $|\psi\rangle = |\phi_A\rangle \otimes |\chi_B\rangle$, findet man wie bereits oben erwähnt, dass die Messungen an Qubit A und Qubit B einander nicht beeinflussen. Dadurch ist

$$P_{\sigma_1\sigma_2} = P_{\sigma_2^A} \cdot P_{\sigma_2^B} \quad \{81\}$$

für $\sigma_i \in \{+1, -1\}$. Daraus folgt aber unmittelbar, dass $K_{\psi}(O_A, O_B) = 0$.

Bei einem maximal verschränkten Anfangszustand, z. B. $|\psi\rangle = |\psi^-\rangle$, gilt für identische Observablen:

$$O_A = O_B \quad \{82\}$$

$$\langle O_A \otimes I \rangle_{\psi^-} = \langle I \otimes O_B \rangle_{\psi^-} = 0 \quad \{83\}$$

und

$$\langle O_A \otimes O_B \rangle_{\psi^-} = \langle \psi^- | O_A \otimes O_B | \psi^- \rangle = -1 \quad \{84\}$$

und somit

$$E_{\psi^-}(O_A, O_B) = -1 \quad \{85\}$$

und auch

$$K_{\psi^-}(O_A, O_B) = -1. \quad \{86\}$$

Die Ergebnisse sind perfekt antikorreliert.

Betrachtet man hingegen teilweise verschränkte Zustände, wie z. B. den Zustand $|\psi\rangle = \cos \vartheta |01\rangle - \sin \vartheta |10\rangle$, so findet man teilweise Korrelationen.

In ähnlicher Weise führen bei einem maximal verschränkten Zustand Messungen in unterschiedlichen Basen an Qubit A und B zu teilweisen Korrelationen. Betrachten wir dazu konkret den $|\psi^-\rangle$ -Zustand, und die Messung der Observablen $O(\beta) = |0_b\rangle\langle 0_b| - |1_b\rangle\langle 1_b|$, zugehörig zu einer Messrichtung b , die gegeben ist durch die Eigenvektoren

$$\begin{aligned} |0_b\rangle &= \cos \beta |0\rangle + \sin \beta |1\rangle, \\ |1_b\rangle &= -\sin \beta |0\rangle + \cos \beta |1\rangle. \end{aligned} \quad \{87\}$$

Wir betrachten die Messung der Observablen $O_A(\alpha)$ an Qubit A (Messrichtung a) und die Messung der Observablen $O_B(\beta)$ an Qubit B (Messrichtung b). Weil die Messungen der einzelnen Qubits jeweils vollkommen zufällige Ergebnisse liefern, gilt:

$$\begin{aligned} E_{\psi^-}(O_A(\alpha), O_B(\beta)) \\ = K_{\psi^-}(O_A(\alpha), O_B(\beta)) \end{aligned} \quad \{88\}$$

Durch Einsetzen zeigt man, dass

$$\begin{aligned} E_{\psi^-}(\alpha, \beta) &= E_{\psi^-}(O_A(\alpha), O_B(\beta)) = \\ \langle \psi^- | O_A(\alpha) \otimes O_B(\beta) | \psi^- \rangle &= \quad \{89\} \\ -\cos(2\alpha - 2\beta). \end{aligned}$$

Je ähnlicher die Messbasen sind, desto stärker ist die Antikorrelation. Bei komplementären Messbasen, also z. B. $\alpha = 0$ und $\beta = \pi/4$ – entsprechend einer z -Messung an Qubit A und einer x -Messung an Qubit B –, erhält man keine Korrelation: $E_{\psi^-}(0, \pi/4) = 0$.

Ähnlich verhält es sich für andere maximal verschränkte Bell-Zustände. So erhält man etwa für den Zustand $|\phi^+\rangle$ und reelle Observablen $O_A(\alpha) \otimes O_B(\beta)$:

$$\begin{aligned} E_{\phi^+}(\alpha, \beta) &= \\ \langle \phi^+ | O_A(\alpha) \otimes O_B(\beta) | \phi^+ \rangle &= \quad \{90\} \\ \cos(2\alpha - 2\beta). \end{aligned}$$

5.4.2 Klassische Korrelation am Beispiel eines Glücksrads

Ein Vergleich zwischen der möglichen Stärke von klassischen Korrelationen und Quantenkorrelationen wird in Abb. 13 anhand verschiedener Glücksräder illustriert. Das Glücksrad wird gedreht und Alice und Bob beobachten das Rad von vorn bzw. von hinten. Alice und Bob können dabei den Messwinkel α bzw. β (= Winkel zur x -Achse des Rades) frei wählen. Als Ergebnis finden sie dabei entweder „weiß“ oder „schwarz“. Uns interessiert nun für unterschiedliche Winkel α und β die Korrelation der Messergebnisse, die nur von der Differenz $|\alpha - \beta|$ abhängt. In Abb. 3 sind die Korrelationen für unterschiedliche Glücksräder dargestellt. Betrachten wir z. B. das Glücksrad 3, so findet man bei identischen Messwinkeln, also $|\alpha - \beta| = 0$, perfekte Korrelation. Sind die Messwinkel allerdings unterschiedlich, hängt es von der Lage des Glücksrads (bzw. vom konkreten Wert von α und β) ab, ob man Korrelation bzw. Antikorrelation findet. Ist $|\alpha - \beta|$ klein, so sind die Ergebnisse überwiegend korreliert, für $|\alpha - \beta| = \pi/4$ findet man gleich häufig korrelierte wie antikorrelierte Ergebnisse – im Mittel also einen Korrelationskoeffizienten 0. Für $|\alpha - \beta| = \pi/2$ sind die Ergebnisse immer antikorreliert.

Vergleicht man die mit diesen klassischen Glücksrädern erzielbaren Korrelationen mit der Korrelation eines maximal verschränkten Zustands $|\phi^+\rangle$, $E_{\phi^+}(\alpha, \beta) = \cos(2\alpha - 2\beta)$, so stellt man fest, dass es kein klassisches Glücksrad gibt, das diese Korrelationen erzielen kann. Die Quantenkorrelationen sind stärker als die klassischen Korrelationen.

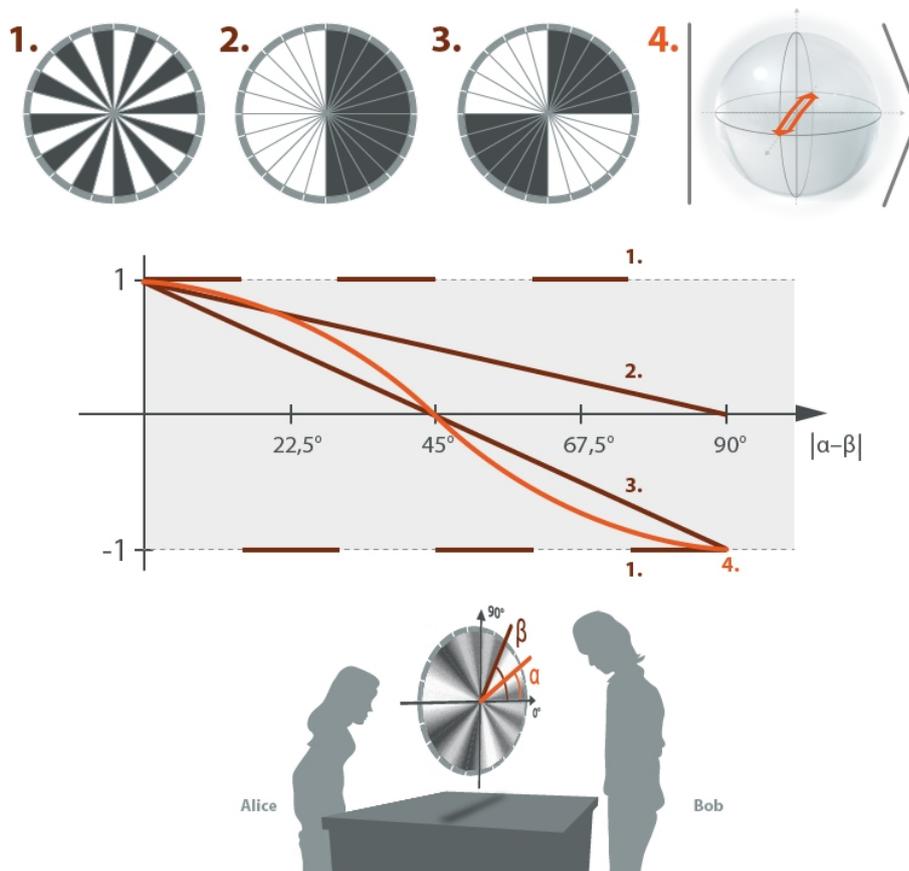


Abb. 13: Vergleich von klassischer Korrelation und Quantenkorrelation. Dazu werden Glücksräder mit unterschiedlicher Struktur (1 bis 3) betrachtet. Die Messung am „Glücksrad“ bei Alice verändert Bobs Ergebnis nicht. Die verschiedenen Glücksräder ergeben die gezeigten Korrelationsfunktionen 1, 2, 3. Die Kurve 4 zeigt die Korrelationen für den maximal verschränkten Bell-Zustand $|\phi^+\rangle$. Die Messung an $|\phi^+\rangle$ bei Alice verändert die Wahrscheinlichkeiten bei Bob, im Gegensatz zum Fall des klassischen Glücksrads.

5.4.3 EPR-Paradoxon und Bell'sche Ungleichung

Diese Eigenschaft der maximal verschränkten Zustände wird im Rahmen der Bell'schen Ungleichung verwendet, um zu zeigen, dass quantenmechanische Korrelationen in der Tat stärker sind als „klassisch erlaubt“. Genauer gesagt sind die quantenmechanischen Korrelationen stärker, als es im Rahmen jeder Theorie möglich ist, welche die für uns üblicherweise so selbstverständlichen Annahmen von „Realität“ und „Lokalität“ erfüllt [8].

Unter „Realität“ versteht man in diesem Zusammenhang, dass Messgrößen einen fixen Wert besitzen – unabhängig davon, ob eine Beobachtung (Messung) durchgeführt wird oder nicht. Ein Objekt besitzt also eine gewisse Eigenschaft. Zufällige Ergebnisse sind in diesem Zusammenhang auch möglich – sie können z. B. durch unzureichende Kenntnis weiterer „verborgener Parameter“ bedingt sein [8]. Lokalität bezieht sich auf den lokal beschränkten Einfluss von Messungen: Eine Messung an einem bestimmten Ort kann das Ergebnis einer Messung an einem weit entfernten Ort nicht beeinflussen.

Diese beiden Annahmen ermöglichen aber, für die erlaubte Stärke von Korrelationen eine ganz allgemein gültige Ungleichung aufzustellen, welche jede Theorie erfüllen muss, die Lokalität und Realität voraussetzt. Dies ist die sogenannte Bell'sche Ungleichung [9, 4]. Eine besonders einfache und gut anwendbare Ungleichung dieses Typs wurde von Clauser, Horne, Shimoni und Holt formuliert. Die sogenannte CHSH-Ungleichung lautet [10]

$$S \leq 2$$

$$S = |E(\vec{a}_1, \vec{b}_1) - E(\vec{a}_1, \vec{b}_2) + E(\vec{a}_2, \vec{b}_1) + E(\vec{a}_2, \vec{b}_2)|. \quad \{91\}$$

Dabei bezeichnet $E(\vec{a}_1, \vec{b}_1)$ den Erwartungswert einer Messung der Eigenschaft „ \vec{a}_1 “ am ersten Teilchen und der Eigenschaft „ \vec{b}_1 “ am zweiten Teilchen – also ein Maß für die Stärke der Korrelationen bei dieser Messung. Im quantenmechanischen Fall sind dies die Messrichtungen, also die Wahl von α bzw. β . Die oben spezifizierte Summe dieser Erwartungswerte bzw. Korrelationen wird mit S bezeichnet. Der Wert von S ist unter Voraussetzung von

„Lokalität“ und „Realität“ auf 2 beschränkt. Man findet nun aber – sowohl mathematisch als auch in zahlreichen Experimenten –, dass verschränkte Zustände für eine bestimmte Wahl der Messrichtungen die CHSH-Ungleichung verletzen.

Für den Singlet-Zustand $|\psi^-\rangle$ führt die Wahl $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi/4$, $\beta_1 = \pi/8$, $\beta_2 = 3\pi/8$ beispielsweise zu $S = 2\sqrt{2}$, d. h. zu einer Verletzung der CHSH-Ungleichung. Die quantenmechanischen Korrelationen sind also stärker als im Rahmen der Ungleichung erlaubt!

Dies bedeutet nun, dass die Quantenmechanik eine (oder auch beide!) der Voraussetzungen – „Lokalität“ und „Realität“ – verletzt. Der experimentelle Nachweis dieser Verletzung hat aber noch weitreichendere Konsequenzen. Die Tatsache, dass sich die Natur so verhält, bedeutet nämlich, dass selbst wenn sich eines Tages herausstellen sollte, dass die Quantenmechanik nicht die korrekte Theorie zur Beschreibung der Natur ist (und wir sollten nicht versucht sein, zu meinen, dass die Quantenmechanik bereits die endgültige Theorie der Natur darstellt – auch wenn sie auf atomarer Ebene so erfolgreich ist), auch jede Nachfolgetheorie notwendigerweise so gestaltet sein muss, dass zumindest eine der für uns so natürlichen Annahmen – Lokalität oder Realität – aufgegeben werden muss. In diesem Sinne geht die Bedeutung der Bell’schen Ungleichung weit über die Quantenphysik hinaus. Sie zeigt uns, dass es keine lokale, realistische Theorie geben kann, welche die Vorgänge in der Natur korrekt beschreibt. Es sei auf Folgendes hingewiesen: Obwohl die Verletzung der Bell’schen Ungleichung in zahlreichen Experimenten mit unterschiedlichen Systemen nachgewiesen wurde, ist bisher kein Experiment durchgeführt worden, das alle möglichen „Schlupflöcher“ (unperfekte Detektoren, „fair sampling“, räumliche Trennung, zufällige Auswahl der Messrichtungen usw.) gleichzeitig berücksichtigt bzw. ausschließt [11]. Unter den Experten herrscht die (beinahe) einhellige Meinung vor, dass die Experimente die Voraussagen der Quantenmechanik – also eine Verletzung der Bell’schen Ungleichung – nachweisen.

5.4.4 Klassische Korrelation vs. Quantenkorrelationen – gemischte Zustände

Ähnlich wie im Fall eines einzelnen Qubits (siehe [2]) betrachten wir nun Unterschiede zwischen klassischen Gemischen und quantenmechanischen Überlagerungszuständen. Auch bei einem klassischen Gemisch können Zufall und Korrelationen auftreten. Diese sind jedoch limitiert und von einer gänzlich anderen Natur als quantenmechanische Korrelationen.

Betrachten wir dazu ein System von zwei klassischen Bits. Wir nehmen an, dass beide Bitwerte identisch sind. Man kann dabei etwa an zwei Kugeln denken, die beide die gleiche Farbe – weiß oder schwarz – besitzen; oder auch an ein Paar Socken,

das entweder weiß oder schwarz ist. Betrachten wir nun ein Ensemble solcher Zwei-Bit-Zustände, in dem die beiden möglichen Konfigurationen 00 und 11 gleich häufig vorkommen, jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $p_{00} = p_{11} = 1/2$. Es ist nun klar, dass bei einer Messung eines einzelnen Bits ein zufälliges Ergebnis gefunden wird. Betrachtet man hingegen Messungen an beiden Bits, so wird man feststellen, dass die Ergebnisse immer identisch sind – die Messergebnisse sind korreliert. Eine analoge Situation kann man sich nun mit Qubits vorstellen, wobei entweder beide Qubits im Zustand $|0\rangle$ oder beide Qubits im Zustand $|1\rangle$ sind. Der Gesamtzustand des Zwei-Qubit-Systems müsste durch eine Dichtematrix ρ beschrieben werden, wobei die Zustände $|00\rangle$ und $|11\rangle$ jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $1/2$ vorkommen. Die Messung der Observablen σ_z am Einzel-Qubit liefert ein zufälliges Ergebnis:

$$\langle \sigma_z^A \otimes I \rangle_\rho = \langle I \otimes \sigma_z^B \rangle_\rho = 0. \quad \{92\}$$

Die Messergebnisse sind aber perfekt korreliert:

$$\langle \sigma_z^A \otimes \sigma_z^B \rangle_\rho = 1. \quad \{93\}$$

Dieses Verhalten erinnert zunächst stark an einen maximal verschränkten Quantenzustand, den $|\phi^+\rangle$ -Zustand, der eine *kohärente* Überlagerung der zwei möglichen Konfigurationen $|00\rangle$ und $|11\rangle$ darstellt. Auch dort findet man bei Messungen der Einzel-Qubits ein zufälliges Ergebnis, bei einer Messung der Observablen $\sigma_z \otimes \sigma_z$ (was einer Messung der Eigenschaft „0“ oder „1“ an beiden Qubits entspricht) immer identische Ergebnisse:

$$\langle \sigma_z^A \otimes \sigma_z^B \rangle_{\phi^+} = +1. \quad \{94\}$$

Die beiden Situationen sind allerdings nicht identisch, und man kann in der Tat durch andere Messungen unterscheiden, welche Situation vorliegt. Eine Möglichkeit ist die Messung der Einzel-Qubits in einer gedrehten Basis, z. B. der x -Basis (Observable σ_x). Man überprüft leicht, dass

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_x\rangle|0_x\rangle + |1_x\rangle|1_x\rangle). \quad \{95\}$$

Daraus folgt unmittelbar, dass auch beim Zustand $|\phi^+\rangle$ für eine Messung in dieser Basis perfekte Korrelation der Messergebnisse vorliegt:

$$\langle \sigma_x^A \otimes \sigma_x^B \rangle_{\phi^+} = 1. \quad \{96\}$$

Für das klassische Gemisch gilt hingegen, dass die Messergebnisse in diesem Fall unkorreliert sind.

Wir stellen uns dazu den gemischten Zustand so vor, dass entweder der Anfangszustand $|00\rangle$ vorliegt, oder der Anfangszustand $|11\rangle$ – jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. In beiden Fällen überzeugen wir uns leicht, dass die Messergebnisse der einzelnen x -Messungen unkorreliert sind:

$$\langle \sigma_x^A \otimes \sigma_x^B \rangle_{|00\rangle} = \langle \sigma_x^A \otimes \sigma_x^B \rangle_{|11\rangle} = 0. \quad \{97\}$$

Dies gilt selbstverständlich auch für das Gemisch der beiden Konfigurationen:

$$\langle \sigma_x^A \otimes \sigma_x^B \rangle_{\rho} = 0. \quad \{98\}$$

Der verschränkte Zustand besitzt also Korrelationen nicht nur bezüglich einer Eigenschaft, sondern bezüglich vieler, unterschiedlicher Eigenschaften. In diesem Sinne sind die Korrelationen stärker als in einem klassischen Zustand oder in einem klassischen Gemisch. Am klarsten ist das beim Singlet-Zustand $|\psi^-\rangle$ zu sehen: Identische Messungen an beiden Qubits in *beliebigen* Basen (d. h. bei Messungen einer beliebigen Eigenschaft) zeigen eine perfekte Antikorrelation (siehe Gleichung $\{1\}$).

Auch durch eine Messung am Gesamtsystem kann zwischen einer kohärenten und einer inkohärenten Überlagerung der Zustände $|00\rangle$ und $|11\rangle$ unterschieden werden. Im ersten Fall gibt es eine vollständige Messung, z. B. die Messung in der Bell-Basis, die ein deterministisches Ergebnis liefert, das zum Zustand $|\phi^+\rangle$ gehört. Im Fall einer inkohärenten Überlagerung, d. h. eines gemischten Zustands, gibt es dagegen keine vollständige Messung, die ein deterministisches Ergebnis liefern könnte – *jede* Messung ist mit einem Zufallselement behaftet.

Verwendet man das Bild der Münze (siehe Abb. 9), so entspricht die kohärente Überlagerung (verschränkter Zustand) einem Ensemble von vielen rotierenden Münzen, deren Eigenschaft jeweils erst durch die Messung festgelegt wird. Die Messergebnisse der beiden Parteien sind immer perfekt antikorreliert, egal welche Eigenschaft gemessen wird. Das klassische Gemisch entspricht aber dem Fall, bei dem jede Münze des Ensembles bereits gefallen ist. Der Wert ist vor der Messung festgelegt, es ist lediglich unbekannt, ob Kopf oder Zahl oben ist. Die Korrelationsfunktion für beide Fälle ist in Abb. 12 bzw. Abb. 15 dargestellt.

5.5 Verschränkung von gemischten Zuständen

Die Frage, ob ein reiner Zustand verschränkt ist oder nicht, lässt sich leicht beantworten. Man muss nur überprüfen, ob es möglich ist, den Zustand als Produktzustand $|\Phi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$ zu schreiben. Ist dies der Fall, handelt es sich nicht um einen verschränkten Zustand – ansonsten ist der Zustand verschränkt.

Bei gemischten Zuständen ist die Situation etwas komplizierter. Betrachten wir dazu eine Situation, in der eine gewisse (klassische) Unsicherheit besteht, welcher Quantenzustand vorliegt, da ein Zustandsgemisch präpariert wurde. Dies wird durch ein Ensemble $\{p_i, |\phi_i\rangle\}$ beschrieben, d. h. durch Angabe der Wahrscheinlichkeiten und der zugehörigen Zustände. Formal kann man das System mit Hilfe eines Dichteoperators beschreiben:

$$\rho = \sum_i p_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|. \quad \{99\}$$

Dieser Dichteoperator übernimmt nun die Rolle des Zustandsvektors und entspricht einer vollständigen Beschreibung des vorliegenden Quantensystems, unter Berücksichtigung der (klassischen) Unkenntnis. Verschiedene physikalische Realisierungen, also unterschiedliche Ensembles $\{p_i, |\phi_i\rangle\}$, können dabei auf identische Dichteoperatoren führen, was aus quantenmechanischer Sicht ununterscheidbaren Situationen entspricht.

Durch den Dichteoperator sind Messwahrscheinlichkeiten sowie der Zustand nach der Messung bestimmt. Betrachtet man eine vollständige Messung, beschrieben durch eine Basis $\{|\chi_i\rangle\}$ bzw. durch die zugehörigen Projektoren $P_i = |\chi_i\rangle\langle\chi_i|$, so ist die Wahrscheinlichkeit für das zu $|\chi_i\rangle$ gehörende Messergebnis gegeben durch:

$$p_i = \text{tr}(P_i \rho) = \langle\chi_i | \rho | \chi_i\rangle. \quad \{100\}$$

Der Zustand nach der Messung ist:

$$\rho_i = P_i \rho P_i / p_i. \quad \{101\}$$

Bei den angegebenen Formeln handelt es sich um die Verallgemeinerung der bereits bekannten Ausdrücke für die Messwahrscheinlichkeit und den Zustand nach der Messung beim Übergang von reinen Zuständen auf gemischte Zustände. Für den Fall $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ reduzieren sich die angegebenen Ausdrücke auf die bereits bekannten. Bei der Berechnung der Messwahrscheinlichkeit betrachtet man den zum Projektor gehörenden Eigenraum eines bestimmten Messergebnisses (z. B. P_0 bzw. P_1 bei der z -Messung an einem einzelnen Qubit). Es wird die Spur der resultierenden Matrix berechnet, was

dem Anteil des Gesamtvektors in diesem Unterraum entspricht. Die Spur einer Matrix (tr für „Trace“ in der obigen Formel) ist einfach die Summe der Diagonalelemente in einer beliebigen Basis. Verwendet man als Basis die Messbasis $\{|\chi_i\rangle\}$, so ergibt sich die angegebene Vereinfachung. Der Zustand nach dieser Messung ist durch die entsprechend projizierte Dichtematrix gegeben (Anwendung des Projektors von links und rechts), wobei diese wieder normiert werden muss.

Das Hauptproblem im Zusammenhang mit Verschränkung ist wohl, dass ein und derselbe Dichteoperator ρ im allgemeinen (unendlich) viele mögliche Realisierungen besitzt. Betrachten wir dazu ein System von zwei Qubits, das ein Gemisch der beiden Zustände $|00\rangle$ und $|11\rangle$ ist, also eine Situation, bei der einer der beiden Zustände mit der jeweiligen Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ vorliegt (vgl. zwei weiße bzw. zwei schwarze Kugeln). Diese Situation ist durch den Dichteoperator $\rho = 1/2(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|)$ beschrieben. Nachdem beide Zustände $|00\rangle$ und $|11\rangle$ Produktzustände sind, ist auch ein Gemisch der beiden Zustände nicht verschränkt. Messergebnisse und Korrelationen für einen solchen gemischten Zustand sind für unterschiedliche Messungen in Abb. 14 und Abb. 15 dargestellt. Man findet, dass die Messergebnisse für Messungen in der z -Basis korreliert sind, Messungen in der x -Basis bzw. in unterschiedlichen Basen liefern jedoch unkorrelierte Ergebnisse. Im Vergleich zeigt ein maximal verschränkter Bell-Zustand $|\phi^-\rangle$ (Abb. 10 und Abb. 12) Korrelationen bei Messungen in der z - und der x -Basis.

Betrachten wir nun eine Situation, bei der einer der maximal verschränkten Bell-Zustände $|\phi^+\rangle$ oder $|\phi^-\rangle$ mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ vorliegt:

$$|\phi^\pm\rangle = 1/\sqrt{2}(|00\rangle \pm |11\rangle). \quad \{102\}$$

Nachdem jeder der beiden möglichen Zustände verschränkt ist, ist es naheliegend anzunehmen, dass auch ein Gemisch dieser beiden Zustände verschränkt ist. Dies ist aber nicht der Fall! Betrachten wir dazu den zugehörigen Dichteoperator $\tilde{\rho} = 1/2(|\phi^+\rangle\langle\phi^+| + |\phi^-\rangle\langle\phi^-|)$. Man überprüft leicht, dass $\tilde{\rho} = \rho$ ist, d. h. dass der Dichteoperator $\tilde{\rho}$ dieses Ensembles identisch ist zum Dichteoperator ρ des ersten Ensembles. Das bedeutet, dass die beiden hier vorliegenden Situationen ununterscheidbar sind und dass jedes beobachtete Messergebnis

durch ein Ensemble erklärt werden kann, dessen zugehöriger Dichteoperator ρ offensichtlich nicht verschränkt ist.

Der Vergleich mit dem zu einem maximal verschränkten Bell-Zustand zugehörigen Dichteoperator $\rho_{\phi^+} = |\phi^+\rangle\langle\phi^+|$ zeigt, dass dieser sich durch die Nebendiagonalelemente $|00\rangle\langle 11|/2$ bzw. $|11\rangle\langle 00|/2$ von ρ unterscheidet. Diese sogenannten quantenmechanischen Kohärenzen sind entscheidend für die Verschränkungseigenschaften des Zustands. Betrachtet man allerdings eine realistische Situation, bei der die Teilchen eines maximal verschränkten Zustands nicht perfekt isoliert sind, sondern mit der Umgebung wechselwirken, so kommt es zu „Dekohärenz“. Dies wirkt sich darin aus, dass diese Kohärenzen (exponentiell) mit der Zeit zerfallen, also die entsprechenden Nebendiagonalelemente der Dichtematrix (und somit die charakteristischen Quanteneigenschaften) kleiner werden. Aus einem maximal verschränkten Zustand wird also mit der Zeit ein klassisch gemischter Zustand, der die typischen Quanteneigenschaften verloren hat.

In diesem Sinne wird ein Dichteoperator ρ als separabel (also nicht verschränkt) bezeichnet, wenn es *eine* mögliche Darstellung als Gemisch von (beliebig vielen) Produktzuständen gibt:

$$\rho_{\text{sep}} = \sum_i p_i |\chi_A^{(i)}\rangle\langle\chi_A^{(i)}| \otimes |\phi_B^{(i)}\rangle\langle\phi_B^{(i)}|. \quad \{103\}$$

Nachdem es aber unendlich viele Möglichkeiten gibt, einen Dichteoperator darzustellen, ist die Überprüfung, ob eine solche Zerlegung möglich ist, ein schwieriges Problem. Für Systeme von zwei Qubits ist es gelungen, ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für Separabilität bzw. Verschränkung anzugeben

Für höherdimensionale Systeme ist die Separabilitätsfrage hingegen nicht einfach zu beantworten. Es sind zwar eine Reihe von entweder notwendigen oder hinreichenden Kriterien bekannt, allerdings wurde gezeigt, dass das Separabilitätsproblem zu einer Klasse von Problemen, den sogenannten NP-harten Problemen gehört, die Computerwissenschaftler als „schwierig“ einstufen. Insbesondere ist für solche Probleme bisher kein Algorithmus bekannt, dessen Effizienz nur polynomiell mit der Systemgröße zunimmt.

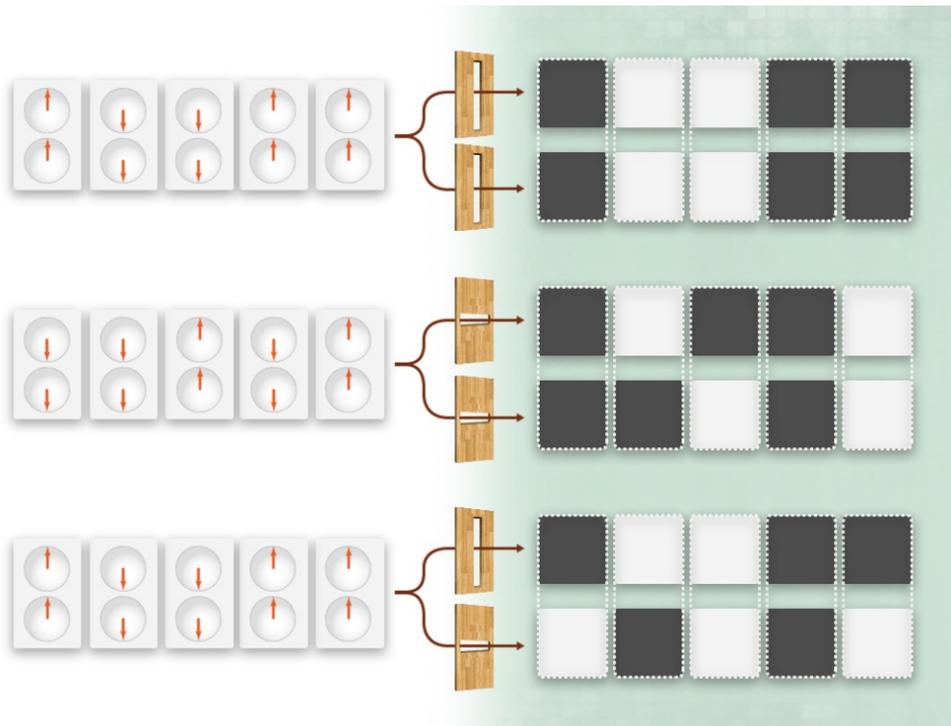


Abb. 14: Messung an einem klassisch gemischten Zwei-Qubit-Zustand der Form $\rho = 1/2 |00\rangle\langle 00| + 1/2 |11\rangle\langle 11|$. Während Messungen in der z -Basis perfekt korreliert sind (oben), ergeben sowohl Messungen in der x -Basis (Mitte) als auch Messungen in unterschiedlichen Basen (unten) zufällige (unkorrelierte) Ergebnisse.

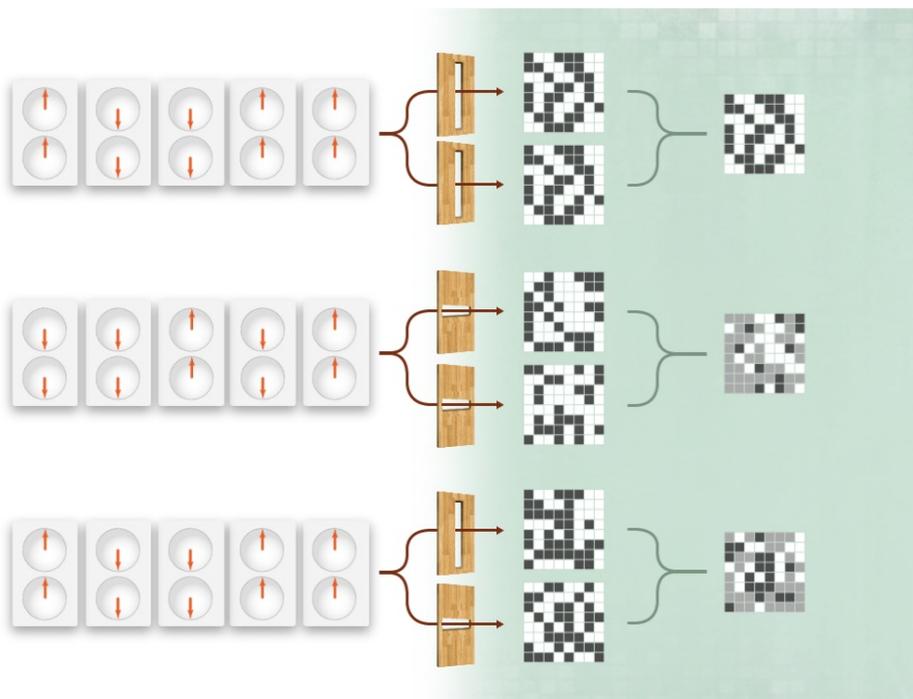


Abb. 15: Korrelation bei einem separablen, klassisch korrelierten Zustand. Im Vergleich zu einem verschränkten Zustand (Abb. 12) ist die Korrelation bei einem gemischten Zustand geringer.

6. Experimentelle Realisierung und Anwendungen

Wir haben bisher von Qubits als abstrakten Objekten gesprochen. Es existiert aber eine Vielzahl von verschiedenen physikalischen Realisierungen von Qubits. In vielen dieser Systeme ist es auch gelungen, Verschränkung gezielt herzustellen und die damit verbundenen seltsamen Quanteneigenschaften experimentell zu beobachten. In der Tat hat es in den letzten Jahren bemerkenswerte experimentelle Fortschritte gegeben, sodass viele Gedankenexperimente aus den frühen Jahren der Quantentheorie heute routinemäßig in verschiedensten Laboren weltweit mit unterschiedlichen Systemen durchgeführt werden können.

In [2] wurden verschiedene Realisierungen eines einzelnen Qubits detailliert vorgestellt, und auch Methoden zur gezielten Manipulation sowie Messungen diskutiert. All diese Systeme erlauben auch die Herstellung von Verschränkung. Insbesondere kann man die Polarisations-eigenschaften mehrerer Photonen miteinander verschränken. Dies geschieht durch doppelbrechende BBO-Kristalle [12]. Auch die elektronischen Zustände mehrerer Ionen in einer Ionenfalle können mit Hilfe von Laserpulsen miteinander verschränkt werden [7]. Dabei wurde Verschränkung von bis zu 15 Ionen gezielt hergestellt und nachgewiesen. Neutrale Atome können in optischen Gittern gefangen und durch Verschieben der Gitter unter Ausnutzung kalter Kollisionen miteinander verschränkt werden [6]. Ebenso ist es möglich, die Spin-Freiheitsgrade mehrerer gefangener Elektronen in Quantenpunkten zu manipulieren und zu verschränken, oder auch Ströme in sogenannten Josephson-Junctions. Darüber hinaus ist es gelungen, Freiheitsgrade unterschiedlicher Systeme miteinander zu verschränken, etwa atomare Zustände mit Lichtfeldern.

Verschränkung ist aber nicht nur ein interessantes grundlegendes Phänomen der Quantenphysik, sondern wird heute als wertvolle Ressource für moderne Anwendungen gesehen. Dabei ist einerseits die Verwendung von Verschränkung zur nicht-lokalen Kontrolle und Manipulation von Quanteninformation, andererseits die Anwendung im Bereich der Quantenkryptographie zu erwähnen. Im ersten Fall können die quantenmechanischen Korrelationen verwendet werden, um einen Quantenzustand an einem weit entfernten Ort gezielt zu präparieren. Ein ähnliches Phänomen liegt der sogenannten Teleportation zugrunde, wobei Quantenzustände bzw. Korrelationen zu einem (weit entfernten) Ort „teleportiert“ werden können – allerdings ohne die Kausalität bzw. die Ausbreitung von Information schneller als mit Lichtgeschwindigkeit zu verletzen. Im Bereich der Quantenkryptographie werden die Korrelationen ausgenutzt, um einen – nur dem Sender (Alice) und dem Empfänger (Bob) bekannten – Zufallsschlüssel zu erzeugen. Die Sicherheit wird dabei durch die Verletzung der Bell'schen Unglei-

chung durch einen maximal verschränkten Zustand überprüft, wodurch sichergestellt wird, dass ein möglicher Lauscher keinerlei Veränderungen durchgeführt hat und deshalb auch keine Möglichkeit besitzt, Information über den Schlüssel zu erlangen.

Die experimentelle Realisierung von Verschränkung sowie verschiedene Anwendungen sind hier nur kurz angesprochen. Sie werden in einem Folgeartikel [3] detailliert behandelt.

7. Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben in diesem Artikel den in [2] vorgestellten Zugang zur Quantenphysik über einfache Quantensysteme vom einzelnen Qubit auf Systeme von zwei Qubits erweitert. Dabei steht in diesem Artikel vor allem die quantenmechanische Verschränkung im Mittelpunkt. Mit Hilfe von Visualisierungen, insbesondere von verschränkten Zuständen auf einer (verallgemeinerten) Bloch-Kugel bzw. von Korrelationen bei Messungen, wurde versucht, anschauliche und einprägsame Bilder vorzustellen, die helfen sollen, die wichtigsten Aspekte dieses recht komplexen Sachverhalts hervorzuheben. Dabei sei insbesondere noch einmal das Bild der rotierenden Münze in Erinnerung gerufen, das nicht nur die Unbestimmtheit der Eigenschaften eines einzelnen Teilchens illustriert, sondern auch die Korrelationen bei Messungen an einem verschränkten Zustand zeigt.

Interessant sind in diesem Zusammenhang sicher auch experimentelle Realisierungen von Verschränkung sowie Anwendungen, insbesondere im Bereich der Quanteninformationsverarbeitung. Diese werden in einem separaten Artikel im Detail vorgestellt und diskutiert. Für ein auf dem Qubit basierendes Unterrichtskonzept als Zugang zur Quantenphysik spielen diese Aspekte eine entscheidende Rolle. Eine rein abstrakte Herangehensweise, wie in diesem Artikel gewählt, erscheint uns selbst bei Verwendung von anschaulichen Bildern als zu einseitig. Zentrale Eigenschaften der Quantentheorie lassen sich hiermit zwar gut erklären und erläutern, aber erst durch die Illustration der Konzepte mit verschiedenen Anwendungen und unterschiedlichen Realisierungsmöglichkeiten wird der Zugang „mit Leben gefüllt“. Als Grundlage sind die hier eingeführten Eigenschaften des Zwei-Qubit Systems für das Verständnis der Anwendungen jedoch unumgänglich notwendig. Besonders attraktiv erscheint die Tatsache, dass man unmittelbar an aktuelle Forschungsthemen anknüpft, die nicht selten auch in der Tagespresse diskutiert werden. Damit ergibt sich ein natürlicher Anknüpfungspunkt für den Unterricht.

Eine Erweiterung des hier vorgestellten Ansatzes auf Systeme mit mehreren Qubits ist vergleichsweise einfach. Dadurch eröffnen sich neue Anwendungsgebiete und Diskussionsmöglichkeiten, insbesondere in Richtung Quantencomputer und Quantensimulatoren, bzw. auch bezüglich der Dekohärenz (Schrödingers Katze) und der Rolle der Quantenphysik auf makroskopischer Ebene. Auch diese

Aspekte sollen in zukünftigen Arbeiten behandelt werden.

8. Referenzen

- [1] R. Müller, *Das Münchener Unterrichtskonzept zur Quantenphysik*, Praxis der Naturwissenschaften – Physik in der Schule 6/57 (2008), S. 19
- [2] Wolfgang Dür und Stefan Heusler, *Was man vom einzelnen Qubit über Quantenphysik lernen kann*, PhyDid A – Physik und Didaktik in Schule und Hochschule, Nr. 11, Band 1 (2012)
- [3] Wolfgang Dür und Stefan Heusler, *Anwendungen und experimentelle Realisierungen des Zwei-Qubits-Systems*, in Vorbereitung
- [4] J.S. Bell, *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*, Cambridge University Press (1987)
- [5] DVD-ROM „Quantendimensionen – Doppelspalt, Verschränkung, Quantencomputer“, Klett Verlag & Sciencemotion (2010)
- [6] D. Jaksch, H. J. Briegel, J. I. Cirac, C. W. Gardiner & P. Zoller, *Entanglement of atoms via cold controlled collisions*, Phys. Rev. Lett. 82, 1975-1978 (1999)
- [7] H. Häffner, C.F. Roos, R. Blatt, *Quantum computing with trapped ions*, Physics Reports 469, 155 (2008)
- [8] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*, Phys. Rev. 47, 777-780 (1935)
- [9] J. Bell, *On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox*, Physics 1, 195 (1964)
- [10] J. Clauser, M. Horne, A. Shimony, R. Holt, *Proposed experiment to test local hidden-variable theories*, Phys. Rev. Lett. 23, 880-884 (1969)
- [11] Z. Merali, *Quantum mechanics braces for the ultimate test*, Science 331, 1380-1382 (2011)
- [12] Jian-Wei Pan, Zeng-Bing Chen, Chao-Yang Lu, Harald Weinfurter, Anton Zeilinger, Marek Żukowski, *Multi-photon entanglement and interferometry*, Rev. Mod. Phys. 84, 777-838 (2012)