Physik und Didaktik in Schule und Hochschule
PhyDid 1/12 (2013), S. 36 - 47

Erde, Mond und G

Franz Embacher*

*Fakultät für Physik der Universität Wien
A-1090 Wien, Boltzmanngasse 5
franz.embacher@univie.ac.at
(Eingegangen: 09.11.2012; Angenommen: 10.09.2013)

Kurzfassung

Unter Verwendung einiger Beobachtungstatsachen, die der Alltagsanschauung leicht zugänglich sind und im günstigsten Fall von SchülerInnen selbst gewonnen werden können, sowie zweier einfacher Folgerungen aus dem Newton'schen Gravitationsgesetz (mit als unbekannt angenommenem Wert der Gravitationskonstante) lassen sich die Radien von Erde und Mond sowie die Erde-Mond-Entfernung und das Produkt aus Erdmasse und Gravitationskonstante erschließen. Auf dieser Basis kann in der Folge auch eine physikalisch motivierte Abschätzung für die Größenordnungen von Erdmasse und Gravitationskonstante angegeben werden. Der Text skizziert – als Angebot für den Unterricht in der Sekundarstufe II – eine Argumentationslinie, die SchülerInnen die Möglichkeit gibt, Fragen nach den Dimensionen des Erde-Mond-Systems und der Stärke der zwischen Himmelskörpern wirkenden Schwerkraft näherungsweise selbst zu beantworten, ohne dabei auf aufwändige parallaktische Beobachtungsmethoden angewiesen zu sein.

1. Einleitung

Wie groß sind Erde und Mond, wie weit sind sie voneinander entfernt? Welche Masse hat die Erde? Welchen Wert hat die Gravitationskonstante, die im Newton'schen Gravitationsgesetz auftritt, und von der die Kräfte zwischen Himmelskörpern abhängen? Größen wie diese sind feste Bestandteile des Physikunterrichts und nicht selten die Einstiegsdroge in ein physikalisches Verständnis der Welt. Oft werden ihre Zahlenwerte aber lediglich *mitgeteilt*, vielleicht illustriert durch Verweise auf die Methode des Eratosthenes von Kyrene zur Bestimmung des Erdradius und Henry Cavendishs Messung der Gravitationskonstante oder auf moderne Präzisionsmessungen unter Einsatz von Spitzentechnologie. Die Lernenden müssen diese Größen hinnehmen, sie haben keine Möglichkeit, sie mit physikalischen Größen zu verbinden, die entweder (zumindest der Größenordnung nach) aus der Alltagserfahrung bekannt sind oder näherungsweise *selbst* in Erfahrung gebracht werden können.

Demgegenüber kann es sowohl im Rahmen der Einführung grundlegender Gesetzmäßigkeiten der Mechanik am Beginn der Oberstufenphysik als auch in späteren Phasen des Physikunterrichts im Zuge von Rückblick und Zusammenschau – zumindest unter ansonsten günstigen Umständen – sinnvoll sein, die fünf Größen

- Erdradius
- Mondradius
- Erde-Mond-Entfernung
- Erdmasse
- Gravitationskonstante

auf der Basis von

- Beobachtungen, die entweder selbst durchgeführt werden können oder zumindest leicht nachvollziehbar und deren Ergebnisse größenordnungsmäßig auch intuitiv plausibel sind,
- und grundlegenden physikalischen Überlegungen

näherungsweise zu *erschließen*. Auch wenn die Zahlenwerte einiger dieser fünf Größen den Lernenden bereits bekannt sind (was in den meisten Fällen zumindest für den Erdradius und die Gravitationskonstante zutreffen wird), kann der Standpunkt eingenommen werden, sie wären (zunächst) noch unbekannt und müssten erst ermittelt werden. Mit der Durchführung eines solchen Vorhabens können wichtige Aspekte wissenschaftlicher – und im Speziellen physikalischer – Tätigkeit vermittelt bzw. gelernt werden.

Im Folgenden wird eine Möglichkeit skizziert, dies durch eine für SchülerInnen im Grundsatz nachvollziehbare Kombination aus Beobachtung (Messung) und Theorie (Anwendung physikalischer Prinzipien und Naturgesetze) zu erreichen.

Was die Möglichkeit der von SchülerInnen selbst durchgeführten oder leicht nachvollziehbaren Beobachtungen/Messungen betrifft, so soll es in diesem Kontext weniger um Fragen der Messgenauigkeit und den Einfluss von Fehlerquellen gehen. Zentral für die Nachvollziehbarkeit sind drei Punkte:

- Die zu beobachtenden Effekte sind der Anschauung recht unmittelbar zugänglich. Konkret geht es um den Wert der Erdbeschleunigung, die Umlaufszeit des Mondes, die scheinbare „Größe" des Mondes am Himmel und die Größe des bei einer Mondfinsternis auf dem Mond sichtbaren Erdschattens.

- Die Werte der entsprechenden Größen lassen sich in groben Näherungen leicht in Erfahrung bringen (Erdbeschleunigung ≈ 10 m/s^2 ; Umlaufszeit des Mondes ≈ 4 Wochen; scheinbare „Größe" des Mondes, als Winkel ausgedrückt $\approx$ ein halber Winkelgrad; Größe des Erdschattens auf dem Mond ≈ 3 mal die Größe des Mondes).
- Genauigkeitsverbesserungen ergeben sich durch Anwendung elementarer physikalischer Mess- und Auswertungsmethoden und können, wie unten beschrieben, mit unterschiedlichem Aufwand erzielt werden. Sie sind aber aus mehreren Gründen begrenzt. Grundsätzlich ist SchülerInnen einsichtig, dass der Einsatz von Präzisionstechnologie (etwa eines Teleskops oder Sextanten anstelle eines Lineals zur Messung der scheinbaren Mondgröße) zuverlässigere Werte liefert. Dass die betrachteten Größen in Wahrheit keine Konstanten sind (da beispielsweise der Mond nicht immer gleich weit von der Erde entfernt ist), verkompliziert zudem die Sachlogik. Wo hier der Bereich des mit SchülerInnen praktisch Machbaren und Nachvollziehbaren überschritten wird, liegt wohl in jedem Fall anders.

In theoretischer und mathematischer Hinsicht werden lediglich

- zwei Konsequenzen des Newton'schen Gravitationsgesetzes (der Newton'sche Ausdruck für die Erdbeschleunigung und die Kreisbahn im Gravitationsfeld eines Zentralkörpers, Letzteres gleichbedeutend mit dem dritten Kepler'schen Gesetz für diesen Spezialfall),
- ein bisschen Geometrie (der Strahlensatz und der Satz von Pythagoras)
- und grundlegende Kompetenzen im Umformen mathematischer Ausdrücke

vorausgesetzt. Das Bogenmaß für die Angabe von Winkeln zu kennen ist nützlich, aber nicht unbedingt notwendig. Falls möglich, wäre die fächerübergreifende Behandlung der auftretenden geometrischen und formalen Aspekte mit dem Mathematikunterricht von Vorteil.

Um SchülerInnen durch eigene Beobachtungen an astronomische Längendimensionen heranzuführen, kann natürlich auch ein weniger theoriebehafteter Weg eingeschlagen werden, in dem das Gravitationsgesetz nicht vorausgesetzt werden muss. So lässt sich beispielsweise die Erde-Mond-Entfernung durch die Ausnutzung der Parallaxe, die sich aus simultanen Beobachtungen an unterschiedlichen Orten der Erde ergibt, ermitteln – eine Methode, die im Rahmen eines international angelegten Projekts mit SchülerInnen tatsächlich durchgeführt worden ist [1]. Der hier vorgeschlagene Zugang erweitert das Spektrum der Möglichkeiten und mag in manchen Fällen eine gangbare und weniger aufwendige Alternative zu derartigen Unternehmungen darstellen.

Er ist aber auch in einer anderen Hinsicht eine Alternative: Obwohl das Newton'sche Gravitationsgesetz – zumindest über die aus ihm folgenden Kepler'schen Gesetze – in Unterrichtsvorschlägen zur Astronomie und Astrophysik eine gewisse Rolle spielt, wird seinen Grundlagen (Gleichheit von träger und schwerer Masse) und der in ihm auftretenden Gravitationskonstante in diesem Zusammenhang wenig Beachtung geschenkt; der Wert der Gravitationskonstante wird üblicherweise als bekannt vorausgesetzt (siehe etwa [2] und [3]). Dies steht in auffallendem Kontrast zu Bemühungen, SchülerInnen astronomische Größen- und Entfernungsdimensionen nahezubringen und ihnen eine Vorstellung davon zu geben, *woher* wir sie kennen. Die Gravitationskonstante und ihr Zahlenwert $G = 6.674 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}^3/(\mathrm{kg\,s}^2)$ sind der Alltagsanschauung aber mindestens ebenso schwer zugänglich wie astronomische Entfernungen. Je vertrauter die Gravitationstheorie ist, umso leichter fällt auch ein Zugang zu astrophysikalischen Fragestellungen (siehe etwa [4] – [6]).

Der hier verfolgte Ansatz behandelt die Gravitationskonstante gleichberechtigt mit anderen astronomisch relevanten Größen. Vorausgesetzt wird lediglich die *Form* des Gravitationsgesetzes, wie sie in Anlehnung an die historische Entwicklung als Theorie zur Erklärung der Planetenbahnen und zu einer Vereinheitlichung irdischer und „himmlischer" Bewegungen motiviert werden kann, nicht aber der Wert der in ihm auftretenden Konstante G.

Im Folgenden wird zunächst eine Argumentationslinie skizziert, die die Radien von Erde und Mond, die Erde-Mond-Entfernung und das Produkt aus Gravitationskonstante und Erdmasse in Bezug zu relativ leicht zu beobachtenden physikalischen Größen setzt. Keine der vier Beziehungen ist eine Überraschung – zumindest drei von ihnen sind allen Lehrkräften wohlbekannt und zumindest zwei sind Gegenstand des Oberstufenunterrichts –, ihre geschickte Kombination vermag aber mehr, als man auf den ersten Blick vermuten möchte. Der springende Punkt dabei besteht darin, das Gravitationsgesetz und einige geometrische Sachverhalte *gleichzeitig* auszunutzen. Als vereinfachte Variante ergibt sich ein Szenario, das den Erdradius als bekannt voraussetzt und leichter durchzuführen ist.

Eine zweite, anschließend angestellte Betrachtung dient dazu, auf der Basis des bis dahin Erreichten und unter Ausnutzung einiger elementarer Eigenschaften der Materie die Erdmasse und den Wert der Gravitationskonstante zumindest grob abzuschätzen. Das Argument läuft über eine Eingrenzung der

Dichten, die Materie in fester oder flüssiger Form annehmen kann und benötigt als numerischen Input den Zahlenwert der Dichte von irdischem Oberflächengestein.

Da das Ziel dieser Unternehmung zwar Ergebnisse mit – im skizzierten Rahmen – sinnvoller Genauigkeit, nicht aber äußerste Präzisionsaussagen sind, werden Näherungen wie die Behandlung von Erde und Mond als Kugeln, der Mondbahn als Kreis und die Vernachlässigung der gravitativen Wirkung des Mondes auf die Erde ohne Vorwarnung angewandt. Mit der Entfernung Erde-Mond ist der Abstand der (Massen-)Mittelpunkte dieser beiden Himmelskörper gemeint.

2. Theoretische Voraussetzungen

Wir benötigen zwei theoretische Voraussetzungen, die beide aus dem Newton'schen Gravitationsgesetz folgen:

- Aus dem Grundgesetz der Mechanik (Masse mal Beschleunigung = Kraft) für einen auf der Erdoberfläche fallenden Körper und dem Newton'schen Gravitationsgesetz ergibt sich unmittelbar der Ausdruck

  $$g = \frac{G M_{\text{Erde}}}{R_{\text{Erde}}{}^2} \qquad \{1\}$$

  für die **Erdbeschleunigung**, wobei M_{Erde} die Erdmasse, R_{Erde} den Erdradius und G die Newton'sche Gravitationskonstante bezeichnet.

- Das Konzept der Zentripetalbeschleunigung, die Herleitung der entsprechenden Formeln und ihre Anwendung auf die **Kreisbewegung im Gravitationsfeld eines Zentralkörpers** sind wohlbekannt und müssen hier nicht besprochen werden. Dieses Thema wird beispielsweise im ersten Abschnitt von [7] behandelt. Wir wollen lediglich folgende Beziehungen festhalten: Um herauszufinden, wie ein Körper (Satellit) der Masse m im Abstand r um die Erde kreist, ist im Grundgesetz der Mechanik

  Satellitenmasse m mal Satellitenbeschleunigung a =
  Newton'sche Gravitationskraft {2}

  (bei Beschränkung auf die Beträge) für a die Zentripetalbeschleunigung $\omega^2 r$ einzusetzen, was auf

  $$m\,\omega^2\, r = \frac{G\, M_{\text{Erde}}\, m}{r^2} \qquad \{3\}$$

  führt. Dabei ist ω die Winkelgeschwindigkeit, die mit der Geschwindigkeit v und der Umlaufszeit T durch die Beziehungen

  $$\omega = \frac{\text{voller Winkel}}{\text{Umlaufszeit}} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\text{Bahnumfang}/\text{Geschwindigkeit}} = \frac{v}{r} \qquad \{4\}$$

  verknüpft ist. Die daraus mit {3} erhaltene Beziehung

  $$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G M_{\text{Erde}}}{4\pi^2} \qquad \{5\}$$

  ist nichts anderes als das **dritte Kepler'sche Gesetz für eine Kreisbahn**. (Alternativ zu dieser Herleitung kann für a in {2} die Zentripetalbeschleunigung in der Form v^2/r eingesetzt werden, was mit {4} natürlich ebenfalls auf {5} führt).

Im Folgenden werden lediglich die Beziehungen {1} und {5} vorausgesetzt, wobei wir uns überdies auf den Standpunkt stellen, den Zahlenwert der Gravitationskonstante zunächst nicht zu kennen. Schließlich war Newton in der gleichen Situation, als er sein Gravitationsgesetz aufstellte!

3. Vier elementare Beobachtungen

Welche Beobachtungen können nun auf einfache Weise an Erde und Mond durchgeführt werden? Wir benötigen zunächst nur vier Größen, deren Bestimmung entweder selbst vorgenommen werden kann oder zumindest – nicht nur die Methode, sondern auch die Größenordnung des Ergebnisses betreffend – für SchülerInnen leicht nachvollziehbar ist:

- **Der Wert g der Erdbeschleunigung**

  Er kann in einem Fallexperiment gemessen werden (wie es im Physikunterricht oft durchgeführt wird) und beträgt $g = 9.81\ \text{m/s}^2$. Mit {1} können wir ihn zu Masse und Radius der Erde sowie zur Gravitationskonstante in Beziehung setzen.

  Anmerkung: Da der Wert $g = 9.81\ \text{m/s}^2$ im Physikunterricht gut etabliert ist (der genaue Wert von g hängt vom Ort auf der Erdoberfläche ab und variiert um einige Promille), können wir davon ausgehen, dass er im Rahmen des gegenwärtigen Kontextes in der Regel von SchülerInnen übernommen und nicht eigens gemessen wird.

- **Die Umlaufszeit T des Mondes um die Erde**

  Die Umlaufszeit des Mondes um die Erde ist die Zeitspanne, nach der sich die von der Erde aus beobachtete Stellung des Mondes relativ zu den Fixsternen wiederholt (sie entspricht dem sogenannten *siderischen Monat*). Ihre Messung setzt die Beobachtung des Mondes über längere Zeiten voraus. Dies im Rahmen des Unterrichts durchzuführen, wird in der Regel zu aufwendig sein, andererseits sollte – auch Jugendlichen – relativ klar sein, wie eine solche Beobachtung in der Praxis zu bewerkstelligen ist. Die Dauer des siderischen Monats beträgt $T = 27.3$ Tage , und wir werden die Genauigkeit dieses Werts im Folgenden nicht problematisieren. Mit {5} können wir ihn mit der Erdmasse, dem Abstand r zum Mond und der Gravitationskontante in Beziehung setzen.

Anmerkung: Der Alltagsanschauung und Lebenserfahrung näher als der siderische steht der um 2 Tage längere *synodische Monat*, nach dem sich die Mondphasen wiederholen. Der Unterschied zwischen diesen beiden Mondperioden rührt von der gekrümmten Bahn der Erde um die Sonne her. Der synodische Monat kann – mit ganztägiger Genauigkeit – als Zeitspanne zwischen zwei aufeinanderfolgenden Vollmonden aus einem Kalender ermittelt werden. (Tatsächlich schwankt seine Dauer um bis zu 7 Stunden um seinen Mittelwert von 29.5 Tagen .) Obwohl es also verlockend erscheinen mag, sich auf den synodischen Monat zu beziehen, wird davon abgeraten, da allein diese vermeintliche (und physikalisch eigentlich unzulässige) Vereinfachung einen Fehler von 15 bis 30% in die Endergebnisse einbringt.

- Das Verhältnis Monddurchmesser zu Mondentfernung

Wir bezeichnen es mit

$$\alpha = \frac{2R_{\text{Mond}}}{r}, \qquad \{6\}$$

wobei r für die Entfernung des Mondes zur Erde und R_{Mond} für den Mondradius steht. Es kann unter Ausnutzung des Strahlensatzes leicht gemessen werden, indem der Mond über ein mit ausgestreckter Hand gehaltenes Lineal anvisiert und die Strecke, die dem Monddurchmesser am Lineal entspricht, durch den Abstand des Lineals zum Auge dividiert wird (Abb. 1).

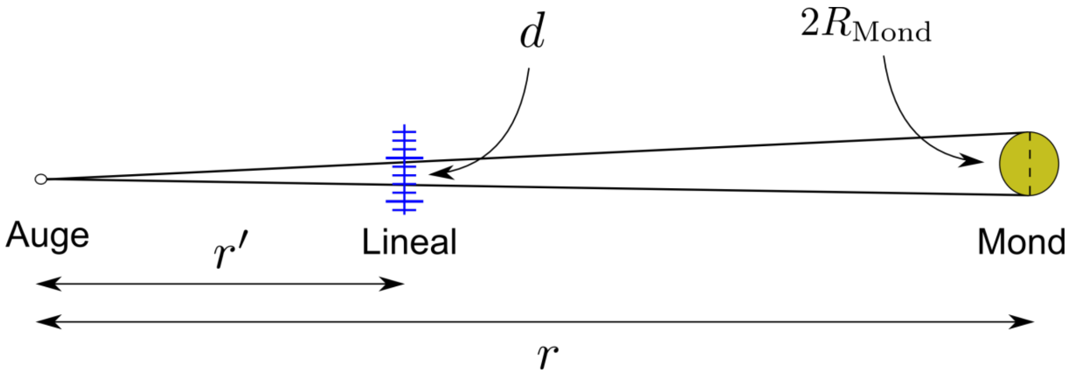

Abb. 1: Beobachtung des Verhältnisses Monddurchmesser zu Mondentfernung. Gemäß dem Strahlensatz gilt $2R_{\text{Mond}} / r = d / r'$.

Das Verhältnis von Monddurchmesser zu Mondentfernung ergibt sich (im Mittel, siehe die nachfolgende Anmerkung) zu $\alpha = 0.009$. Da R_{Mond} sehr viel kleiner als r ist, kann diese Größe auch als **Winkel** (im Bogenmaß) interpretiert werden, **unter dem wir den Monddurchmesser sehen**. Sie entspricht etwas mehr als einem halben Winkelgrad. Aus Beobachtungen von Sonnenfinsternissen ergibt sich, dass wir die **Sonne** unter ziemlich genau dem **gleichen Winkel** sehen.

Anmerkung zum wahren Wert von α: Der Winkel, unter dem wir den Monddurchmesser sehen, ist aufgrund der annähernd elliptischen Mondbahn in Wahrheit nicht immer gleich. Er variiert zwischen $\alpha_{\min} = 0.00854$ und $\alpha_{\max} = 0.00975$ (siehe [8], S. 26 und [2], S. 105). Im zeitlichen Mittel liegt er mit 0.00904 recht genau beim oben angegebenen Wert. Wird die Beobachtung in einer Zeit des Maximalwerts durchgeführt und dieser zu 0.01 aufgerundet, so ergibt sich eine relative Abweichung zum mittleren Wert von 11%, was auch die Endergebnisse geringfügig von den in der Literatur nachzulesenden mittleren Werten zu den aktuellen Werten zum Beobachtungszeitpunkt verschiebt.

- **Die Größe der Erde relativ zur Größe des Mondes**

  Wir bezeichnen das Verhältnis von Erd- zu Mondradius mit

$$\kappa = \frac{R_{\text{Erde}}}{R_{\text{Mond}}}. \qquad \{7\}$$

  Um es (näherungsweise) zu „sehen“, müssen wir auf eine Mondfinsternis warten (genauer: auf eine „Kernschattenfinsternis“, bei der der Mond in den Kernschatten der Erde eintritt) oder auf die Aufnahme einer solchen Mondfinsternis zurückgreifen (Abb. 2).

Abb. 2: Mondfinsternis vom 16.8.2008 [9]. Im Internet finden sich zahlreiche Aufnahmen dieser Art. Die hier ausgewählte Aufnahme besitzt hohe Kontrastwerte, so dass die Grenze zwischen hellen und dunklen Bereichen gut sichtbar ist. Ein guter Kontrast erleichtert SchülerInnen die Auswertung, sollte aber, wie weiter unten angemerkt, auch mit einem kritischen Auge betrachtet werden.

Dabei müssen wir allerdings bedenken, dass der Kernschatten der Erde in Mondentfernung aufgrund der Größe der Sonne etwas kleiner ist als der Erdradius. Er hängt mit der Größe von Erde und Mond wie in Abb. 3 skizziert zusammen, wobei uns zugutekommt, dass wir Sonne und Mond unter dem gleichen (bereits ermittelten) Winkel α sehen. (In Wahrheit ist diese Gleichheit nicht immer exakt gegeben – siehe [2], S. 105 –, kann aber im gegenwärtigen Kontext angenommen werden).

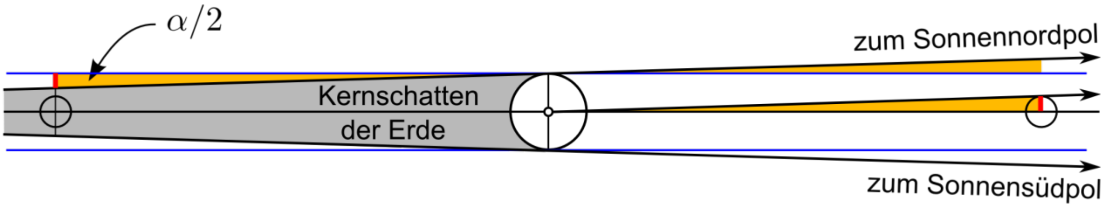

Abb. 3: Der Kernschatten der Erde in Mondentfernung ist etwas kleiner als die Erde. Wie die Skizze zeigt, ist die Differenz zwischen Erdradius und Kernschattenradius in Mondentfernung (Länge der kurzen roten Linie in der linken Position des Mondes; diese Position entspricht einer Mondfinsternis) gleich dem Mondradius (Länge der kurzen roten Linie in der rechten Position des Mondes; diese Position entspricht einer Sonnenfinsternis): $R_{\text{Kernschatten}} = R_{\text{Erde}} - R_{\text{Mond}}$. Dabei ist vorausgesetzt, dass wir Mond- und Sonnendurchmesser unter dem gleichen (bereits bekannten) Winkel α sehen. Aufgrund der großen Entfernung zur Sonne und der Kleinheit von α können die beiden zum Sonnennordpol verlaufenden Strecken als parallel betrachtet werden. Daher sind die drei orange eingefärbten Dreiecke zueinander kongruent. Das bei einer Kernschattenfinsternis beobachtbare Verhältnis von Kernschattenradius zu Mondradius ist daher durch $R_{\text{Kernschatten}} / R_{\text{Mond}} = (R_{\text{Erde}} / R_{\text{Mond}}) - 1$ gegeben, woraus $\kappa = R_{\text{Erde}} / R_{\text{Mond}} = (R_{\text{Kernschatten}} / R_{\text{Mond}}) + 1$ folgt.

Um nun das Verhältnis

$$\kappa = \frac{R_{\text{Erde}}}{R_{\text{Mond}}} = \frac{R_{\text{Kernschatten}}}{R_{\text{Mond}}} + 1 \qquad \{8\}$$

aus der Aufnahme einer Mondfinsternis mit einiger Genauigkeit zu ermitteln, können wir wie in Abb. 4 gezeigt vorgehen: Die Länge der Sehne s und die Höhe h des entsprechenden Kreissegments lassen sich auf dem Ausdruck einer Aufnahme (oder am Bildschirm) leicht mit einem Lineal abmessen. Zur Bestimmung von R'_{Mond} kann der Mondmittelpunkt mit Zirkel und Lineal konstruiert oder ebenfalls eine (aus der Sicht der Geometrie weniger „erlaubte", aber in der Praxis gangbare) Abmessung des Durchmessers mit dem Lineal vorgenommen werden. Mit dem Satz von Pythagoras in der Form

$$\left(R'_{\text{Kernschatten}} - h\right)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = R'^{\,2}_{\text{Kernschatten}} \qquad \{9\}$$

ergibt sich

$$\kappa = \frac{R_{\text{Erde}}}{R_{\text{Mond}}} = \frac{R_{\text{Kernschatten}}}{R_{\text{Mond}}} + 1\,. \qquad \{10\}$$

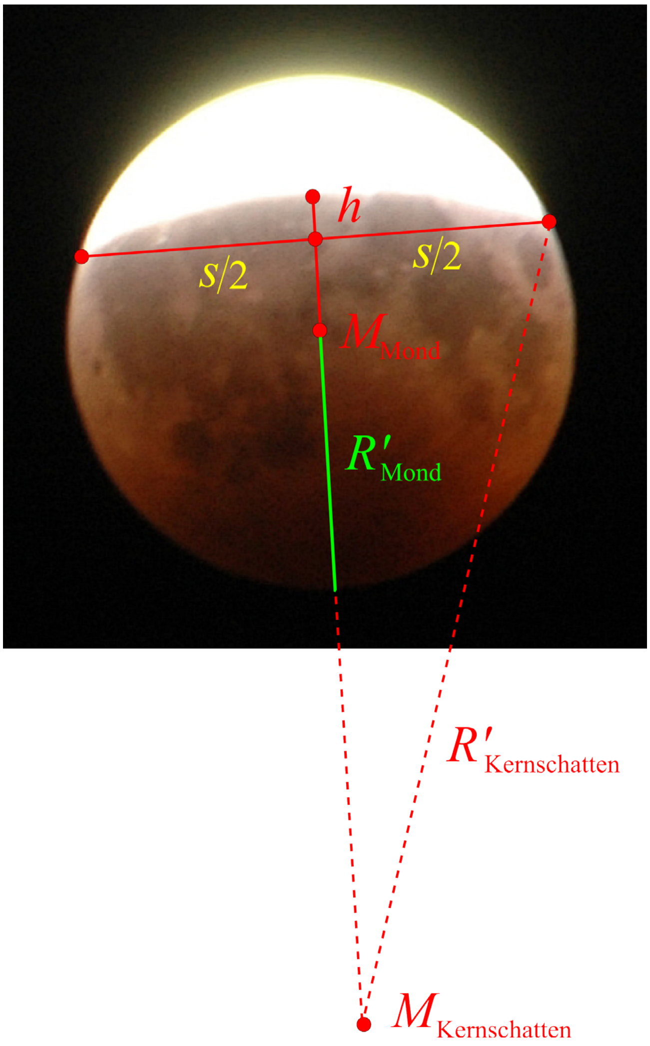

Abb. 4: Ermittlung von κ mit Hilfe der Aufnahme einer Mondfinsternis

In einem typischen Papierausdruck der obigen Abbildung ergibt sich mit $h = 6.5\,\text{mm}$, $s = 74\,\text{mm}$ und $R'_{\text{Mond}} = 40\,\text{mm}$ das Verhältnis $R_{\text{Kernschatten}} / R_{\text{Mond}} = 2.7$ und daher $\kappa = 3.7$, was bedeutet, dass der Erdradius um den Faktor 3.7 größer ist als der Mondradius.

Anmerkungen zur Genauigkeit: Wird der Unterschied zwischen dem Erdradius und dem Radius des Kernschattens nicht berücksichtigt, so weichen die Endergebnisse um einen Faktor 2 bis 7 von den tatsächlichen Werten ab; sie sind also sehr ungenau! Aber auch beim oben beschriebenen genaueren Verfahren sind die aus der Aufnahme einer Mondfinsternis abgemessenen Werte aus mehreren Gründen mit einer gewissen Vorsicht zu genießen: Aufgrund der Brechung und Streuung des Sonnenlichts in der Erdatmosphäre wird die Schattengrenze unscharf und auf manchen Aufnahmen schwer zu lokalisieren. Außerdem wird der Kernschatten um ca. 2% größer als ihn eine Erde ohne Atmosphäre werfen würde. In Aufnahmen mit hohem Kontrast tritt die Grenze zwischen hellen und dunklen Bereichen deutlicher hervor, kann aber geringfügig von der tatsächlichen Schattengrenze abweichen. In der Praxis werden die von SchülerInnen erzielten Ergebnisse mehr oder weniger vom oben angegebenen Idealwert $\kappa = 3.7$ abweichen. Eine Thematisierung des Sachverhalts durch die Lehrkraft und eine entsprechende Korrektur wäre in diesem Fall zumindest eine didaktisch zu rechtfertigende Möglichkeit.

Um das Vorwissen der SchülerInnen hinsichtlich der bei der Durchführung der besprochenen Methoden auftretenden geometrischen Sachverhalte bestmöglich zu aktivieren, erscheint eine fächerübergreifende Behandlung des Themas in Kooperation mit dem Mathematikunterricht sinnvoll.

Jede der vier nun erhaltenen Beobachtungsdaten hat eine altehrwürdige Geschichte. Die Entdeckung und Messung der Erdbeschleunigung geht auf Galileo Galilei zurück, während T, α und κ bereits für die antiken Naturforscher und Astronomen von Bedeutung waren. Die erste genaue Bestimmung des siderischen Monats (ebenso wie des synodischen) wurde von Hipparchos von Nicäa im zweiten vorchristlichen Jahrhundert durchgeführt. Die Bestimmung von κ anhand von Mondfinsternissen geht auf Aristarchos von Samos (drittes vorchristliches Jahrhundert) zurück und wurde von Hipparchos perfektioniert. Aus κ und dem seit Eratosthenes von Kyrene (drittes vorchristliches Jahrhundert) bekannten Erdradius – den wir im Folgenden aber zunächst als unbekannt voraussetzen – konnte Hipparchos die Größe des Mondes ermitteln, und mit Hilfe der relativ leicht zu messenden Größe α auch seine Entfernung.

Die Kenntnis dieser vier Größen g, T, α und κ – zusammen mit den oben besprochenen theoretischen Voraussetzungen – reicht aus, um die Radien von Erde und Mond, die Mondentfernung und das Produkt aus Gravitationskontante und Erdmasse zu bestimmen.

4. Bestimmung von R_{Erde}, R_{Mond}, r und GM_{Erde}

Jede der vier zuvor beschriebenen Beobachtungsdaten steht in einer Beziehung zu bestimmten Kombinationen der interessierenden Größen. Fassen wir diese vier Beziehungen zusammen:

$$\frac{GM_{\text{Erde}}}{R_{\text{Erde}}{}^2} = g \qquad \{11a\}$$

$$\frac{4\pi^2 r^3}{GM_{\text{Erde}}} = T^2 \qquad \{11b\}$$

$$\frac{2R_{\text{Mond}}}{r} = \alpha \qquad \{11c\}$$

$$\frac{R_{\text{Erde}}}{R_{\text{Mond}}} = \kappa \qquad \{11d\}$$

Auf den rechten Seiten stehen jeweils die bereits durch Beobachtungen ermittelten Größen. Auf den linken Seiten stehen R_{Erde}, R_{Mond}, die Erde-Mond-Distanz r, die Erdmasse M_{Erde} und die Gravitationskonstante G. Die letzten beiden kommen nur in der Kombination GM_{Erde}, der sogenannten „geozentrischen Gravitationskonstante“ vor (ein Sachverhalt, der eine tiefere Bedeutung hat, und auf den wir noch eingehen werden). Wir haben also vier Gleichungen vor uns, auf deren linken Seiten die (noch unbekannten) Größen R_{Erde}, R_{Mond}, r und GM_{Erde} stehen. Vier Gleichungen mit vier Unbekannten – das ist ein ideales Verhältnis von Bekanntem zu Unbekanntem! Mit ein paar einfachen Umformungsschritten können wir die vier Unbekannten durch die Beobachtungsdaten ausdrücken und damit zu bekannten Größen machen! Die Ergebnisse sind:

$$R_{\text{Erde}} = \frac{g\,T^2\alpha^3\kappa^3}{32\,\pi^2} \qquad \{12a\}$$

$$R_{\text{Mond}} = \frac{g\,T^2\alpha^3\kappa^2}{32\,\pi^2} \qquad \{12b\}$$

$$r = \frac{g\,T^2\alpha^2\kappa^2}{16\,\pi^2} \qquad \{12c\}$$

$$GM_{\text{Erde}} = \frac{g^3T^4\alpha^6\kappa^6}{32^2\,\pi^4} \qquad \{12d\}$$

Interessanterweise kann auch der Erdradius durch unsere Beobachtungsdaten ausgedrückt werden! Ohne die Beobachtung des Mondes wäre er nicht so einfach zu bestimmen gewesen. Alternativ lässt sich der Erdradius natürlich nach der Methode des Eratosthenes von Kyrene ermitteln. Sie funktioniert rein geometrisch und benötigt das Gravitationsgesetz nicht (ist in diesem Sinn also weniger „theoriegeladen“), aber ihre praktische Umsetzung ist wesentlich aufwendiger.

SchülerInnen wird der Schritt von {11} zu {12} leichter fallen, wenn die Zahlenwerte von g, T, α und κ in {11} sofort eingesetzt werden. Damit ergeben sich zwar unmittelbar die numerischen Ergebnisse (die wir gleich hinschreiben werden). Die allgemeine Form der Formeln {12a} – {12d} zeigt aber sehr schön auf, dass zur Bestimmung *jeder* der vier berechneten Größen die Werte von g, T, α und κ nötig sind. Fehlt ein Wert, klappt die ganze Methode nicht. Weiterhin geht aus ihr hervor, wie (und wie sensibel) die berechneten Größen von den Beobachtungsdaten abhängen. Je höher die auftretenden Exponenten, umso größer die relativen

Fehler, die bei ungenauen Messungen gemacht werden! Um die auf formalem Weg aus den Beziehungen {12} zu gewinnenden Informationen in möglichst große Nähe zum mathematischen Vorwissen der SchülerInnen zu bringen, bietet sich auch an dieser Stelle eine fächerübergreifende Kooperation mit dem Mathematikunterricht an.

Setzen wir die oben angegebenen Zahlenwerte

$$g = 9.81\ \text{m/s}^2 \qquad \{13a\}$$

$$T = 27.3\ \text{Tage} \qquad \{13b\}$$

$$\alpha = 0.009 \qquad \{13c\}$$

$$\kappa = 3.7 \qquad \{13d\}$$

in {12} ein, so ergibt sich (jeweils mit einer Genauigkeit von 4 Stellen angegeben):

$$R_{\text{Erde}} = 6381\ \text{km} \qquad \{14a\}$$

$$R_{\text{Mond}} = 1725\ \text{km} \qquad \{14b\}$$

$$r = 383\,300\ \text{km} \qquad \{14c\}$$

$$GM_{\text{Erde}} = 3.995 \cdot 10^{14}\ \text{m}^3/\text{s}^2 \qquad \{14d\}$$

Vergleichen wir die auf diese Weise erhaltenen Werte mit den tatsächlichen Werten (Tabelle 1):

Größe	Berechnet aus {12} mit den in {13} angegebenen Werten von g, T, α und κ	Anmerkungen zu den tatsächlichen Werten
R_{Erde}	6381 km	Der mittlere Erdradius (definiert als Radius einer Kugel gleichen Volumens) beträgt 6371.0 km (nach [8], S. 26).
R_{Mond}	1725 km	Der mittlere Mondradius beträgt 1737 km (nach [8], S. 26).
r	383 300 km	Die Distanz Erde-Mond variiert zwischen 356 410 km und 406 697 km. Der mittlere Abstand des Mondes von der Erde beträgt 384 400 km (siehe [8], S. 26). Er wächst jährlich um 3.8 cm (siehe [4], S. 593).
GM_{Erde}	$3.995 \cdot 10^{14}\ \text{m}^3/\text{s}^2$	Der Wert dieser Größe (die geozentrische Gravitationskonstante) wurde im *World Geodetic System 1984* zu $3.986004418 \cdot 10^{14}\ \text{m}^3/\text{s}^2$ festgelegt (siehe [10], S. 28), ist also sehr genau bekannt.

Tab. 1: Berechnete und tatsächliche Werte von R_{Erde}, R_{Mond}, r und GM_{Erde}

Die Genauigkeit dieser mit den Idealwerten von g, T, α und κ erzielten Ergebnisse lässt nichts zu wünschen übrig – der Fehler ist in allen Fällen (verglichen mit den tatsächlichen *mittleren* Werten in den ersten drei Fällen) kleiner als ein Prozent!

Wird anstelle des siderischen der (der Lebenserfahrung leichter zugängliche) synodische Monat (im Mittel 29.5 Tage) für T herangezogen, so ergibt sich $R_{\text{Erde}} = 7451\ \text{km}$, $R_{\text{Mond}} = 2014\ \text{km}$, $r = 447\,517\ \text{km}$ und $GM_{\text{Erde}} = 5.446 \cdot 10^{14}\ \text{m}^3/\text{s}^2$, was zwar weniger beeindruckend, aber auch nicht schlecht ist. Wird der Unterschied zwischen dem Erdradius und dem Radius des Kernschattens bei einer Mondfinsternis nicht berücksichtigt, so sind die Ergebnisse, wie bereits erwähnt, wesentlich ungenauer.

Werden die Idealwerte von g und T zugrunde gelegt, so führen Abweichungen der von SchülerInnen bestimmten Werte für α und κ natürlich ebenfalls zu ungenaueren Ergebnissen, die aber dennoch die wahren Dimensionen angemessen wiedergeben. Die folgende (mit dem Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz berechnete) Tabelle zeigt, wie sich relative Fehler von α und κ auswirken (Tabelle 2):

Relative Fehler …		… verursachen relative Fehler …			
$\Delta\alpha/\alpha$	$\Delta\kappa/\kappa$	$\Delta R_{\text{Erde}}/R_{\text{Erde}}$	$\Delta R_{\text{Mond}}/R_{\text{Mond}}$	$\Delta r/r$	$\Delta(GM_{\text{Erde}})/(GM_{\text{Erde}})$
0.01	0	0.03	0.03	0.02	0.06
0	0.01	0.03	0.02	0.02	0.06
0.01	0.01	0.04	0.04	0.03	0.08
0.05	0	0.15	0.15	0.10	0.30
0	0.05	0.15	0.10	0.10	0.30
0.05	0.05	0.21	0.18	0.14	0.42

Tab. 2: Relative Fehler

Die Größe GM_{Erde} ist aufgrund der in {12d} enthaltenen sechsten Potenzen von α und κ am empfindlichsten gegenüber kleinen Abweichungen.

Anlässlich der Interpretation der Genauigkeit der Ergebnisse ist eine methodische Bemerkung angebracht. Eine Messung von α und die Bestimmung der Mondentfernung zu einer bestimmten Zeit zielt auf die *aktuellen Werte* dieser Größen zum Zeitpunkt der Messung ab und nicht auf die in der Literatur nachzulesenden *mittleren Werte*, und Gleiches (wenngleich mit geringerer Auswirkung) gilt für den (in der obigen geometrischen Behandlung der Mondfinsternis mit α gleichgesetzten) Winkel, unter dem wir die Sonne sehen. Die zeitlichen Schwankungen dieser Größen stellen *reale* Effekte dar, die von Fehlern zu unterscheiden sind, die durch ungenaue Messungen verursacht werden. In diesem Zusammenhang sollte auch bedacht werden, dass diese Schwankungen in unserem Modell einer kreisförmigen Mondbahn gar nicht vorgesehen sind. Dass dennoch Ergebnisse erzielt werden können, die nicht weit von den mittleren Werten entfernt liegen, rührt daher, dass die Schwankungen nicht allzu groß sind.

Zieht es die Lehrkraft vor, den Erdradius als bekannt vorauszusetzen und in diesem Zusammenhang nicht zu thematisieren, so kann eine der Beziehungen {11a} oder {11d} weggelassen werden. Dafür kommt sicher am ehesten {11d} in Frage. Damit kann auf die Analyse der Geometrie von Mondfinsternissen verzichtet werden, was die Argumentation vereinfacht. Aus {11a} kann dann unmittelbar GM_{Erde} gewonnen werden und damit r aus {11b} und in der Folge R_{Mond} aus {11c}. Daraus ergibt sich eine Variante, die traditionelleren Vorgangsweisen näher kommt, sich von diesen aber sachlogisch dadurch unterscheidet, dass wir G als (noch) unbekannt ansehen.

In historischer Hinsicht sei angemerkt, dass sich Isaac Newton nicht nur in der Situation befand, den Wert der Gravitationskonstante nicht zu kennen, sondern zunächst einmal das Erklärungspotential des Gravitationsgesetzes als solches ausloten zu müssen. Sein epochemachender Fortschritt bestand darin, das Produkt GM_{Erde} im Einklang mit den ihm zur Verfügung stehenden Beobachtungsdaten (die über die hier verwendeten Näherungen, etwa des kreisförmigen Mondumlaufs bei fixierter Erdposition, wesentlich hinausgingen) zu bestimmen.

5. Erdmasse und Gravitationskonstante

Unsere bisherigen Ergebnisse haben noch einen Schönheitsfehler: Wir haben nun zwar das Produkt GM_{Erde} ermittelt, nicht aber die beiden Faktoren G und M_{Erde}. Mit diesem Schönheitsfehler hat es eine tiefere Bewandtnis, die mit der Gleichheit von träger und schwerer Masse zusammenhängt. Die Bewegung eines Körpers der Masse m unter dem gravitativen Einfluss eines oder mehrerer anderer Körper wird gemäß dem Grundgesetz der Mechanik beschrieben durch

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots, \qquad \{15\}$$

wobei auf der rechten Seite die von den verschiedenen Körpern ausgeübten Gravitationskräfte stehen. Gemäß dem Newton'schen Gravitationsgesetz sind sie alle proportional zu m, was zur Folge hat, dass m aus {15} herausfällt (und zwar auf der linken Seite der Gleichung in seiner Rolle als träge Masse, auf der rechten in seiner Rolle als schwere Masse). Alle verbleibenden Massen kommen dann nur mit G multipliziert vor, ebenso wie in {1} und {5}. Durch die Beobachtung der Bewegung von Körpern, auf die lediglich ihre (wechselseitigen) Gravitationskräfte wirken, lassen sich daher weder deren Massen noch die Gravitationskonstante bestimmen!

Der einzige Ausweg besteht darin, auch andere, nicht gravitative Kräfte einzubeziehen. Dabei erschweren uns allerdings zwei Tatsachen das Leben:

- Die Gravitationskräfte zwischen Himmelskörpern sind *so groß*, dass sie andere Kräfte bei Weitem dominieren (was wiederum damit zusammenhängt, dass elektrische Ladungen positiv oder negativ sein können und einander in normaler Materie über große Distanzen neutralisieren, während sich die von Massen verursachten Gravitationskräfte aufsummieren).
- Die Gravitationskräfte zwischen Gegenständen, mit denen wir auf der Erde experimentieren können, sind *so klein*, dass sie von anderen Kräften dominiert werden (was damit zusammenhängt, dass die Schwerkraft zwischen den elektrisch geladenen Bausteinen der Atome viel kleiner ist als die zwischen ihnen wirkenden elektromagnetischen Kräfte, auf die auch die mechanischen Kräfte, die wir im Alltag auf Gegenstände ausüben, zurückgeführt werden können).

Aus diesen Gründen ist die Gravitationskonstante unter allen fundamentalen Naturkonstanten diejenige, die wir am ungenauesten kennen. Historisch wurde sie im Jahr 1798 (mehr als 100 Jahre nachdem Newton sein Gravitationsgesetz aufgestellt hatte!) von Henry Cavendish bestimmt. Er verglich die zwischen zwei Kugeln von zusammen 316 kg Masse wirkenden Gravitationskräfte mit der auf einen Draht ausgeübten Torsionskraft. Um SchülerInnen begreiflich zu machen, woher wir den Wert dieser Naturkonstante kennen, wird meist auf das Cavendish-Experiment verwiesen. Manche Schulen verfügen sogar über eine „Gravitationswaage", mit der es nachvollzogen werden kann [11].

Es gibt aber eine Alternative (bzw. Ergänzung) – eine Argumentation, die auf physikalischen Überlegungen beruht und zumindest auf eine grobe Schätzung von G (und gleichzeitig der Erdmasse) führt. Sie läuft auf die Frage hinaus, welche Dichte die

Erde hat. Wäre die mittlere Dichte ρ der Erde (definiert als Erdmasse/Erdvolumen) bekannt, so könnte man die Erdmasse mit

$$M_{\text{Erde}} = \text{Erdvolumen} \times \rho = \frac{4\pi}{3} R_{\text{Erde}}{}^3 \rho \quad \{16\}$$

ermitteln und, sofern das Produkt GM_{Erde} bereits bekannt ist, auch den Wert der Gravitationskonstante. Haben wir eine Chance, die Dichte der Erde abzuschätzen?

Die Dichte oberflächennaher Gesteine der Erde beträgt ungefähr $2700\ \text{kg/m}^3$ (eine Größenordnung, die leicht durch eine Dichtemessung an einem Stein verifiziert werden kann). Aus zwei Gründen ist es physikalisch plausibel, anzunehmen, dass die Dichte im Erdinneren größer ist als an der Oberfläche:

- Besteht die Erde aus unterschiedlichen Materialien, so werden die schwereren (d. h. jene mit höherer Dichte) zum Großteil schon vor langer Zeit ins Erdinnere „abgesunken“ sein.
- Aufgrund der Last des Materials, aus dem die Erde besteht, wird der Druck in großer Tiefe sehr groß sein und die Atome zusammendrücken. In eine Volumeneinheit passen dann mehr Atome als im nicht zusammengedrückten Zustand, d. h. die Dichte ist größer.

Der springende Punkt des Arguments besteht nun in der Beobachtung, dass die Dichten der meisten Festkörper und Flüssigkeiten in einem überschaubaren Bereich von etwa $1000\ \text{kg/m}^3$ bis $20000\ \text{kg/m}^3$ liegen. Werden feste oder flüssige Stoffe stark zusammengepresst, so erhöht sich deren Dichte – im Gegensatz zum Druck – nur geringfügig. Atome und (kleinere) Moleküle sind sehr robust! Sie verdanken diese Eigenschaft der elektromagnetischen Wechselwirkung, die ihre Bestandteile (Atomkerne und Elektronen) aneinander bindet (und – der Vollständigkeit halber angemerkt – der Quantennatur dieser Wechselwirkung). Dieses Verhalten kann illustriert werden, indem versucht wird, einen Eisennagel in einen Gegenstand aus massivem Eisen einzuschlagen. Der Druck an der Spitze des Nagels ist für kurze Zeit beträchtlich, führt aber offenbar nur zu einer kleinen Delle von der Größe der Nagelspitze, in deren Nähe die Dichte vielleicht geringfügig erhöht ist. (Der Korrektheit halber sei angemerkt, dass dieses Verhalten bei Drücken, die in Weißen Zwergen herrschen, zusammenbricht. In diesen ist die Atomstruktur zerbrochen, die Materie ist – aufgrund des Pauli-Prinzips – „entartet“. Die Erde trennen aber beim Wert für den Druck sechs Zehnerpotenzen von einem solchen Zustand). Daher können wir vermuten, dass auch die Dichte im Erdinneren nicht viel größer ist als auf der Erdoberfläche. Geben wir der mittleren Dichte der Erde im Vergleich zur Dichte an der Oberfläche einen Faktor 2, d. h. veranschlagen wir $\rho \approx 5400\ \text{kg/m}^3$, so ergibt sich mit {16} und {14a} die Abschätzung (auf eine Stelle genau angegeben)

$$M_{\text{Erde}} \approx 6 \cdot 10^{24}\ \text{kg}\,, \quad \{17\}$$

was recht gut in der Nähe des tatsächlichen Wertes von $5.974 \cdot 10^{24}$ kg liegt (siehe [8], S. 122). Mit {14d} kann dann die Gravitationskonstante zu

$$G = \frac{GM_{\text{Erde}}}{M_{\text{Erde}}} \approx 7 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \quad \{18\}$$

abgeschätzt werden, was den tatsächlichen Wert von $6.674 \cdot 10^{-11}\,\text{m}^3/(\text{kg s}^2)$ ebenfalls gut trifft.

Diese Variante der Argumentation mag ein bisschen gekünstelt wirken, da der Faktor 2 lediglich „gut geraten“ war. Wird die mittlere Dichte der Erde etwas größer oder kleiner abgeschätzt, so ergibt sich mit {16} eine um den entsprechenden Faktor größere oder kleinere Erdmasse, und daher mit {14d} ein kleinerer oder größerer Wert für G. Das können wir aber ausnutzen, um eine seriösere Eingrenzung vorzunehmen. Die sinnvollen Grenzen der Dichteschätzung sind:

- Die mittlere Dichte der Erde ist sicher größer als die Dichte von Oberflächengestein. Mit $\rho \approx 2700\ \text{kg/m}^3$ ergibt sich die Untergrenze für die Erdmasse zu $3 \cdot 10^{24}$ kg und die Obergrenze für die Gravitationskonstante zu $10^{-10}\,\text{m}^3/(\text{kg s}^2)$.
- Eine Obergrenze für die Erdmasse kann weniger verlässlich angegeben werden. Wenn das Erdinnere aus besonders schweren Metallen bestünde und $\rho \approx 30000\ \text{kg/m}^3$ veranschlagt wird, ergibt sich für die Erdmasse $3 \cdot 10^{25}$ kg und für die Gravitationskonstante $10^{-11}\,\text{m}^3/(\text{kg s}^2)$.

Anstelle von {17} und {18} lässt sich daher etwas vorsichtiger eingrenzen:

$$\begin{gathered} 3 \cdot 10^{24}\ \text{kg} < M_{\text{Erde}} < 3 \cdot 10^{25}\ \text{kg} \\ \text{und} \\ 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} < G < 10^{-10}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}\,. \end{gathered} \quad \{19\}$$

Im Rahmen des Unterrichts kann dem hier zugrunde gelegten Verhalten der Materie der Rang einer „Hypothese“ zugesprochen werden, die noch durch weitere Beobachtungen und Hypothesenbildungen untermauert werden muss (wie sie sich etwa in der Atomphysik ergeben, aber auch in der Geophysik, die das Erdinnere mit Hilfe von Erdbebenwellen untersucht), um jenen Grad an Sicherheit zu erlangen, den wir in der Wissenschaft als „Theorie“ bezeichnen.

Damit ist durch eine nachvollziehbare physikalische Überlegung deutlich gemacht, in welchem Größenordnungsbereich die Erdmasse und die Gravitationskonstante (höchstwahrscheinlich) liegen. Notwendig für diesen Zugang waren lediglich die Kenntnis der Dichte von Materialien an der Erdoberfläche und eine plausible Vorstellung vom Dichteverhalten von Festkörpern und Flüssigkeiten.

Die hier vorgeführte Argumentation hat historische Vorbilder. Dass – wie oben besprochen – der Wert der Gravitationskonstante nicht aus gravitativ bestimmten Bewegungen von Körpern unbekannter Masse ermittelt werden kann, hat Physiker und Astronomen Jahrhunderte lang beschäftigt. Bereits Newton ermittelte einen Näherungswert von G, basierend auf der Annahme, die Dichte der Erde betrage das Fünffache der Dichte von Wasser. Weitere frühe Versuche beruhten auf der Messung der Lotabweichung in der Nähe von Bergen, deren Massen abgeschätzt wurden ([12], S. 31). Auch Cavendishs Motivation, sein berühmtes Experiment durchzuführen, war nicht in erster Linie die Messung einer fundamentalen Naturkonstante, sondern die Bestimmung der Dichte der Erde. Verfeinerungen der Messmethoden, um G genauer bestimmen zu können, sind bis heute ein Thema der fundamentalen Physik [13].

Wurden im Unterricht einmal Größenordnungsbereiche wie {19} erzielt, so hat die Mitteilung der genaueren Werte der Erdmasse und der Gravitationskonstante (sofern sie nicht bereits im Voraus bekannt waren) lediglich den Charakter einer nachträglichen Präzisierung, die sich in das grundlegende physikalische Verständnis dieser der Alltagsanschauung so weit entrückten Größen einfügt.

6. Nachbemerkungen

Um die Logik der gesamten Argumentation und die Rolle, die das Gravitationsgesetz in ihr spielt, noch einmal nachzuvollziehen und zu durchdenken, empfiehlt sich die Frage an die SchülerInnen:

- Warum hat die Masse des Mondes in unseren Überlegungen keine Rolle gespielt (und konnte daher auch nicht ermittelt werden)?

Eine Variation dieser Frage ist:

- Wieso kann das hier beschriebene Verfahren nicht dazu verwendet werden, um die Größe der Sonne und deren Entfernung (die „Astronomische Einheit“) zu ermitteln?

Die Antworten auf beide Fragen haben den gleichen Kern: Das Gravitationsgesetz erlaubt es uns, die Bahndaten eines *Satelliten* mit der Masse des *Zentralkörpers* in Beziehung zu setzen, *nicht* aber mit jener des *Satelliten*! (Dabei ist – wie auch in den bisherigen Betrachtungen – vorausgesetzt, dass die durch den Satelliten verursachte Bewegung des Zentralkörpers vernachlässigt wird). Die erste Frage ist damit unmittelbar beantwortet. Im Szenario der zweiten Frage wäre die Erde der Satellit, und daher fehlt zur Übertragung unserer Argumentation die Schwerebeschleunigung auf der Sonnenoberfläche. Wäre sie bekannt, so ließen sich mit den Analogien von {1} und {5} und der nun als bekannt vorausgesetzten Gravitationskonstante die Sonnenmasse und die Entfernung Erde-Sonne bestimmen. Da die Schwerebeschleunigung auf der Sonnenoberfläche aber nicht bekannt ist, lässt sich aus dem dritten Kepler‘schen Gesetz lediglich das Verhältnis Sonnenmasse/(Entfernung Erde-Sonne)^3 bestimmen.

Die Bestimmung der Mondmasse ist im Prinzip möglich, wenn das Erde-Mond-System als Zweikörpersystem betrachtet, also die Rückwirkung des Mondes auf die Erde nicht vernachlässigt und ebenso beobachtet wird wie der Umlauf des Mondes um die Erde. Der von der Gravitationswirkung des Mondes herrührende Umlauf der Erde (genauer: des Erdmittelpunkts) um den Massenmittelpunkt des Erde-Mond-Systems, der sich der Bahn der Erde um die Sonne überlagert, führt zu kleinen, aber messbaren Verschiebungen der scheinbaren Position der Sonne, woraus die Lage des Massenmittelpunkts und damit die Masse des Mondes ermittelt werden kann. Eine andere Methode ergibt sich durch die Beobachtung künstlicher Mondsatelliten, die dem Mond die Rolle eines Zentralkörpers zuweist, dessen Masse dann mit dem Gravitationsgesetz ermittelt werden kann.

Verallgemeinernd lässt sich aus der Diskussion der Frage nach der Mondmasse schließen, dass die Bestimmung der Masse eines Himmelskörpers, der keinen Begleiter besitzt, schwierig ist. Interessanterweise beruhen die genauesten Werte der Massen von Planeten und Monden im Sonnensystem auf der Beobachtung der Bewegung künstlicher Raumsonden. (Siehe [14] für eine faszinierende Alternative.)

Das Problem der Entfernung Erde-Sonne ist historisch insofern bedeutsam, als sich mit dem Gravitationsgesetz (unter Vernachlässigung der Rückwirkung der Planeten auf die Sonne) aus den Umlaufszeiten der Planeten nur die Verhältnisse ihrer Abstände bestimmen lassen, nicht aber die Abstände selbst. Wird {5} in der Form

$$\frac{r_j^3}{T_j^2} = \frac{G M_{\text{Sonne}}}{4\pi^2} \qquad \{20\}$$

(in der Näherung kreisförmiger Bahnen) für den j-ten Planeten adaptiert, und kennt man die Radien r_j nicht, so bleibt auch das Produkt $G M_{\text{Sonne}}$ unbekannt. Die Umlaufszeiten T_j können gemessen werden, woraus sich mit

$$\frac{r_j^3}{r_k^3} = \frac{T_j^2}{T_k^2} \qquad \{21\}$$

(für den j-ten und den k-ten Planeten) nur die *Verhältnisse* der Bahnradien ergeben. Werden zu einem beliebigen Zeitpunkt die Winkel zwischen den Sichtlinien zu den Planeten und zur Sonne gemessen, so lassen sich daraus alle Abstände im Sonnensystem *relativ zueinander* bestimmen – sie sind dann bis auf einen Faktor bestimmt. Wird ein *einziger* Abstand zu einem Planeten (oder zur Sonne) mit anderen Methoden gemessen, so sind damit *alle* Längen im Sonnensystem auch *absolut* bekannt!

Um dies zu erreichen, bietet sich vor allem die Messung der Parallaxen der beiden nächsten Planeten Mars und Venus an (d. h. der Unterschiede der von verschiedenen Orten auf der Erde beobachteten Positionen dieser Planeten vor dem Fixsternhintergrund). Die historisch bedeutsamen Beobachtungen der Venustransite im 18. und 19. Jahrhundert fallen in diese Kategorie. (Beim Venustransit von 2004 wurde diese Methode im Rahmen eines internationalen Projekts unter Mitwirkung von SchülerInnen nachvollzogen, siehe [1].) Seit dem 20. Jahrhundert können auch Asteroiden, die der Erde nahe kommen, dazu verwendet werden. Modernere und genauere Methoden bestehen in der Messung der Laufzeit von Radarsignalen, die auf der Erde ausgesandt und von einem Planeten (vorzugsweise der Venus) zurückgeworfen werden.

Diese Betrachtungen sollten deutlich gemacht haben, dass (und warum) der hier vorgestellte Ansatz, der aufwendige parallaktische Beobachtungsmethoden vermeidet, auf das Erde-Mond-System beschränkt ist.

7. Literatur

[1] Backhaus, Udo (2009): *Astronomie im Physikunterricht*, in: Ernst Kircher, Raimund Girwidz und Peter Häußler (Hrsg.): *Physikdidaktik* (Springer, 2009).

[2] Lotze, Karl-Heinz (2011): *Himmelsmechanik*, in: Wilfried Kuhn (Hrsg.): *Handbuch der experimentellen Physik. Sekundarbereich II. Ausbildung – Unterricht – Fortbildung. Band 11N: Astronomie – Astrophysik – Kosmologie* (Aulis Verlag, 2011).

[3] Lotze, Karl-Heinz und Schneider, Werner B. (Hrgs., 2002): *Wege in der Physikdidaktik. Band 5: Naturphänomene und Astronomie* (Palm & Enke, Erlangen und Jena, 2002). Online: http://www.solstice.de/veroeffentlichungen/buchreihe-wege-in-der-physikdidaktik/.

[4] Bergmann, Ludwig und Schaefer, Clemens (2002): *Lehrbuch der Experimentalphysik. Band 8: Sterne und Weltraum* (Walter de Gruyter, Berlin, 2002).

[5] Spatschek, Karl-Heinz (2003): *Astrophysik. Eine Einführung in Theorie und Grundlagen* (G. B. Teubner Verlag / GWV Fachverlage, Wiesbaden, 2003).

[6] Weigert, Alfred; Wendker, Heinrich J. und Wisotzkin, Lutz (2009): *Astronomie und Astrophysik: Ein Grundkurs* (Wiley-VCH Verlag, 2009).

[7] Embacher, Franz (2010): *Kreisbewegung, Schwingung und Welle*, online: http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/PhysikDidaktik/KreisbewegungSchwingungWelle.pdf

[8] Moore, Patrick and Rees, Robin (Hrsg., 2011): *Patrick Moore's Data Book of Astronomy* (Cambridge University Press, 2011).

[9] Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Mondfinsternis_2008-08-16.jpg. Veröffentlicht unter der Lizenz Creative Commons CC BS-SA 3.0 von Eporun at de.wikipedia.

[10] Seeber, Günter (2003): *Satellite Geodesy* (Walter de Gruyter, Berlin, 2003). Online: http://uqu.edu.sa/files2/tiny_mce/plugins/filemana-ger/files/4260086/8/Satellite%20Geodesy.pdf.

[11] Zwei Projekte mit SchülerInnen zur Messung der Gravitationskonstante sind unter http://www.wgg-neumarkt.de/texte/physik/grav.php und http://www.a-e-g-frankenthal.de/index.php?id=472 dokumentiert.

[12] Schutz, Bernard (2004): *Gravity from the ground up: An introductory guide to gravity and general relativity* (Cambridge University Press, Cambridge, 2004).

[13] Wolschin, Georg (2000): *Fortschritte bei g und G*, Spektrum der Wissenschaft 3 (2000); Wolschin, Georg (2001), *Schwierige Bestimmung einer fundamentalen Naturkonstanten*, Praxis der Naturwissenschaften – Physik in der Schule, 6/50 (2001). Online: http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~wolschin/GT.pdf.

[14] *Eine Waage für unsere kosmischen Nachbarn* (Pressemitteilung der Max-Planck-Gesellschaft vom 24.8.2012). Online: http://www.mpg.de/602435/pressemitteilung20100824.