

Der Begriff der elektrischen Spannung und seine Messung in Gegenwart von zeitlich veränderlichen Magnetfeldern

Udo Backhaus und Thomas Braun

Didaktik der Physik, Universität Duisburg-Essen, 45117 Essen
(Eingegangen: 07.10.2005; Angenommen: 14.02.2006)

Kurzfassung

Vorstellungen, die bei der Einführung des Spannungsbegriffs bei Gleichstromkreisen oder in der Elektrostatik entwickelt werden, passen nicht mehr, wenn Induktionseffekte eine Rolle spielen. Die Lernschwierigkeiten, die dadurch auftreten können, werden beschrieben. Die Analyse der fachlichen Grundlagen und einiger Experimente führt zu Vorschlägen für den Umgang mit dem Spannungsbegriff im Falle zeitlich veränderlicher Ströme und Felder.

1. Einleitung

Vor kurzem haben Pelster und Hüttl ([8]) in dieser Zeitschrift an ein überraschendes Experiment erinnert, das in den 70er Jahren im American Journal of Physics ausführlich diskutiert, aber in Deutschland nur wenig zur Kenntnis genommen wurde ([8] enthält zahlreiche Literaturhinweise.). Abbildung 1 zeigt die Darstellung aus ([8]), Abbildung 2 eine mit Standardlehrmaterial leicht aufzubauende Realisierung: Eine Leiterschleife mit zwei unterschiedlich großen Widerständen R_1 und R_2 ist um den Kern eines Elektromagneten montiert, der mit Wechselstrom betrieben wird. Zwei Voltmeter zeigen unterschiedlich große Ausschläge, obwohl sie an dieselben Punkte der Leiterschleife angeschlossen sind. Die Messwerte verhalten sich annähernd wie die Widerstände. Schließt man den Elektromagneten an eine Gleichspannungsquelle und schaltet die Voltmeter in den Gleichspannungsmodus, zeigen die Voltmeter beim Einschalten Ausschläge in entgegengesetzte Richtung.

Dem Experiment liegt eines der Grundphänomene der Elektrodynamik zu Grunde: elektromagnetische Induktion. Es verliert jedes überraschende Moment, wenn man statt der Voltmeter ein empfindliches Amperemeter in die Leiterschleife schaltet: In der Schleife wird durch ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld ein elektrisches Feld induziert, das einen elektrischen Strom durch die Widerstände zur Folge hat. Das elektrische Feld genügt dem Induktionsgesetz, das als integrale Form der 2. Maxwell'schen Gleichung geschrieben werden kann:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\dot{\Phi} \quad (1)$$

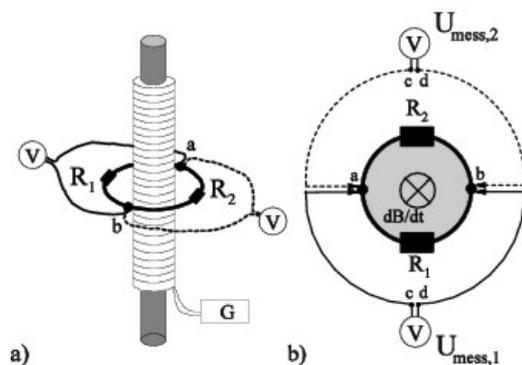


Abbildung 1: Abbildungen aus [8]

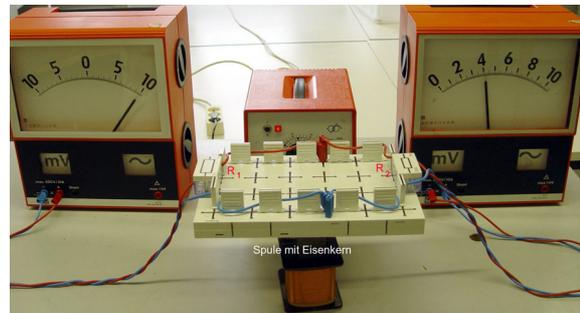


Abbildung 2: Einfache experimentelle Realisierung

Dabei ist $\dot{\Phi}$ die zeitliche Ableitung des magnetischen Flusses durch die vom Stromkreis aufgespannte Fläche.

Nimmt man den Widerstand der Kabel als vernachlässigbar an, verschwindet die elektrische Feldstärke überall im Kabel und aus (1) wird sofort:

$$\int_{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\dot{\Phi} \quad (2)$$

Zieht man noch das Ohm'sche Gesetz ($\vec{j} = \sigma \vec{E}$) heran, ergibt sich schließlich mit

$$R_1 I + R_2 I = -\dot{\Phi} \Rightarrow I = \frac{-\dot{\Phi}}{R_1 + R_2} \quad (3)$$

eine Beziehung, die sich bei sorgfältiger Durchführung näherungsweise bestätigen lässt bzw. mit der man die Stärke des magnetischen Feldes B bestimmen kann, wenn man statt der Voltmeter ein Amperemeter in den Stromkreis schaltet.

Der Effekt des Experimentes beruht also nicht auf dem Vorgang an sich, sondern allein auf der Anzeige der Voltmeter und der Diskrepanz zur Erwartung der Beobachter. Wenn aber bereits bei einem so einfachen Experiment grundlegende Probleme bei der Interpretation von Spannungsmesswerten auftreten, ist das ein Hinweis, dass bei der Einführung des Spannungsbegriffs prinzipielle Fehler geschehen. Es lohnt also, sich vor der Auseinandersetzung mit dem Experiment die Grundlagen des Spannungsbegriffes in Erinnerung zu rufen.

2. Der Begriff der elektrischen Spannung

Der Spannungsbegriff hat sich historisch bei der Untersuchung von elektrostatischen Feldern und zur Beschreibung von Gleichstromkreisen entwickelt. Auch heute wird er bei der Behandlung einer dieser beiden Phänomenbereiche eingeführt. Die dabei entwickelten Vorstellungen hängen eng mit dem Energiebegriff zusammen: *Die Spannung (bzw. die Potentialdifferenz) zwischen zwei Punkten ist ein Maß für die Energie, die umgesetzt wird (bzw. werden kann), wenn Ladung von einem der Punkte zum anderen bewegt wird.*

Im Folgenden soll der Gedankengang bei der Einführung des Spannungsbegriffs kurz skizziert werden:

Zur Beschreibung einfacher Stromkreise reicht die Stromstärke I allein nicht aus, z.B. weil mit derselben Stromstärke bei verschiedenen Quellen oder an verschiedenen Widerständen im Stromkreis unterschiedliche Energieumsätze verbunden sind. Zur Beschreibung ist deshalb eine zusätzliche unabhängige Größe erforderlich. Geeignet sind die elektrische Spannung U , die Energie E oder der elektrische Widerstand R . Üblicherweise wird zur vollständigen Beschreibung von Stromkreisen und zur Vorhersage ihrer Eigenschaften der Spannungsbegriff verwendet und das Voltmeter als zugehöriges Messgerät eingeführt. Die Spannung ist, im Gegensatz zur elektrischen Stromstärke, eine *Eigenschaft von zwei Punkten*: die (Klemm-) Spannung von Quellen, die Spannung an/über Widerständen, der Spannungsabfall zwischen zwei Punkten. Sie wird gemessen, indem ein Voltmeter an diese beiden Punkte angeschlossen wird.

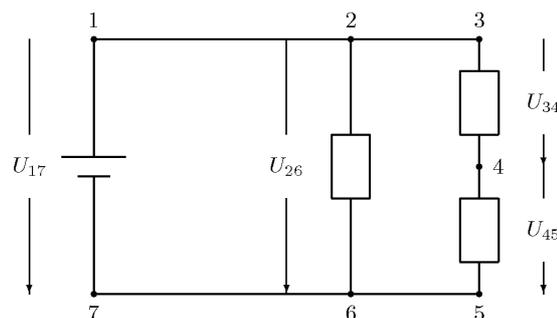


Abbildung 3: Spannungen in einem verzweigten Gleichstromkreis

Bei Spannungsmessungen werden, z.B. an der Schaltung in Abbildung 3, folgende Grunderfahrungen gesammelt:

$$U_{17} = U_{26} = U_{35} = U_{34} + U_{45} \quad (4)$$

Verallgemeinerung führt zur so genannten **Maschenregel**:

$$\begin{aligned} U_{\text{Batterie}_1} + U_{\text{Batterie}_2} + \dots \\ = U_{R_1} + U_{R_2} + \dots \\ = R_1 I_1 + R_2 I_2 + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Dabei ist links über alle „Quellen“ und rechts über alle „Verbraucher“ in einer Masche zu summieren. Bei geeigneter Vorzeichenfestlegung¹ kann (5) folgendermaßen geschrieben werden:

$$U_{12} + U_{23} + \dots + U_{n1} = 0 \quad (6)$$

Aufgrund dieser Gleichungen lassen sich die Messwerte der Spannung anschaulich interpretieren.

- als **Potentialdifferenz**, für die die Höhendifferenz im Gravitationsfeld oder die Druckdifferenz bei der Strömung von Wasser Analogien bilden: In der Quelle wird die strömende Ladung von niedrigem zu höherem Potential bewegt, sie wird „angehoben“, in den Verbrauchern strömt sie vom höheren zum niedrigeren Potential „hinunter“, um schließlich nach Durchströmen des Stromkreises (einschließlich der Batterie!) wieder auf demselben Potential zu sein. Entsprechend spricht man auch vom „Spannungsabfall“ an den stromdurchflossenen Verbrauchern.
- als Maß für die in der Quelle und in den Verbrauchern bei Transport der Ladung q umgesetzte **Energie** E :

$$U = \frac{E}{q} \quad (7)$$

In der Quelle muss Energie aufgewendet werden, um (positive) Ladung vom Minus- zum Pluspol zu bewegen. In den angeschlossenen

¹ Zur Festlegung von Vorzeichen siehe Abschnitt 8.

Verbrauchern wird entsprechend Energie beim Fließen der Ladung frei.

- als Maß für die Stromstärke der von der Quelle (bei einer bestimmten elektrischen Stromstärke I) zum angeschlossenen Verbraucher **übertragenen Energie** P :

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = P = UI \Rightarrow U = \frac{P}{I} \quad (8)$$

- In der Elektrostatik wird durch

$$\phi(\vec{r}) := - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (9)$$

einem (statischen) elektrischen Feld mit der Feldstärke E ein **(elektrostatisches) Potential** ϕ zugeordnet und damit die Spannung zwischen zwei Punkten definiert:

$$U_{12} = \phi_1 - \phi_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (10)$$

Der Ausdruck $q\phi$ beschreibt dann die potentielle Energie eines geladenen Körpers in dem elektrischen Feld.

Die Anzeigen der Voltmeter in dem eingangs dargestellten Experiment stehen im manifesten Widerspruch zu einer solchen Einführung des Spannungsbegriffes und zu den Vorstellungen, die sich dadurch mit ihm verbinden: Die Messgeräte zeigen einen Ausschlag, durch die Widerstände fließt also (anscheinend) ein Strom, obwohl keine Energiequelle im Stromkreis zu erkennen ist. Und obwohl die Voltmeter an dieselben Punkte angeschlossen sind, zeigen sie unterschiedliche Messwerte an, die bei geeigneter Versuchsdurchführung sogar entgegengesetztes Vorzeichen aufweisen. Beim Experimentieren bemerkt man darüber hinaus, dass sich die Ausschläge der Voltmeter ändern können, ohne dass irgend etwas an der Schaltung, dem Elektromagneten und der Leiterschleife, geändert wird: Die Anzeigen sind davon abhängig, wie die Messkabel von den Widerständen zu den Messgeräten geführt werden!

Die Spannung ist also in diesem Experiment *nicht* die Eigenschaft zweier Punkte der Schaltung. Die Voltmeter messen *keine Eigenschaft des Stromkreises (allein)*. Ihre Anzeigen machen nur eine Aussage über das aus Stromkreis und Messgerät mit den zugehörigen Kabeln zusammengesetzte System.

Die Ursache für diese Diskrepanzen zwischen Messwerten und Erwartungen ist das zeitlich veränderliche Magnetfeld: *Was geht schief mit dem Spannungsbegriff, wenn Induktion eine Rolle spielt?*

3. Spannung und elektromagnetische Induktion

Grundlage der Maschenregel (Gleichungen (5) und (6)), bzw. der Wegunabhängigkeit der Potentialdefinition (10) ist die Wirbelfreiheit des elektrostatischen Feldes:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \text{ oder } \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (11)$$

Diese Voraussetzung ist bei Gegenwart eines zeitlich veränderlichen Magnetfeldes nicht mehr erfüllt. Die Maschenregel muss vielmehr zur 2. Maxwell'schen Gleichung, zum Induktionsgesetz also, ergänzt werden:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \text{ oder } \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\dot{\Phi} \quad (12)$$

Damit ist das Linienintegral über die elektrische Feldstärke nicht mehr unabhängig vom Integrationsweg. Stattdessen gilt:

$$\int_{1(C_1)}^2 E \cdot d\vec{s} = \int_{1(C_2)}^2 \vec{E} \cdot d\vec{s} - \dot{\Phi}. \quad (13)$$

Dabei ist $\dot{\Phi}$ der magnetische Fluss durch die aus C_1 und $-C_2$ gebildete geschlossene Kurve. Diese Wegabhängigkeit hat in der Theorie zur Folge, dass es nicht mehr eindeutig möglich ist, ein (elektrostatisches) Potential zu definieren². Experimentell äußert sich dieser Umstand darin, dass die Maschenregel (6) nicht mehr gültig ist, sondern ersetzt werden muss durch³

$$U_{12} + U_{23} + \dots + U_{n1} = -\dot{\Phi}. \quad (14)$$

Es ist deshalb im Allgemeinen nicht mehr im bisherigen Sinne möglich, sinnvoll von der Spannung zwischen zwei Punkten zu sprechen: Die Anzeige des Voltmeters hängt davon ab, wie es mit diesen beiden Punkten verbunden wird. Mit anderen Worten: Es ist nicht mehr klar, was die Anzeige eines Voltmeters bedeutet.

Dieses Problem hat, im Rahmen der Diskussion über das Eingangsexperiment, Romer ([9]) bereits 1982 in die Frage gekleidet:

² Stattdessen muss zusätzlich ein Vektorpotential \vec{A} eingeführt werden. Die beiden Potentiale sind nicht eindeutig. Sie können so genannten Eichtransformationen unterworfen werden, ohne dass sich irgend eine messbare Eigenschaft von magnetischem oder elektrischem Feld ändert (siehe z.B. [4]).

³ Man kann diese Beziehung formal wieder als Maschengleichung schreiben, indem man $-\dot{\Phi}$ als EMK oder $\dot{\Phi}$ als U_{ind} bezeichnet:

$$\sum U_{ij} + U_{ind} = 0 \text{ oder } U_1 = U_{\text{Batterie}} + EMK$$

Wir verzichten darauf, weil U_{ind} bzw. EMK, anders als die anderen Spannungsterme, nicht eindeutig bestimmten Teilen des Stromkreises zugeordnet werden können.

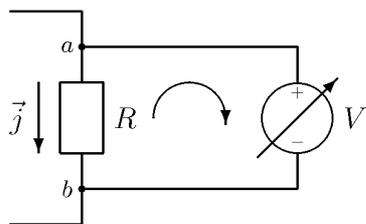


Abbildung 4: Zur Messung der Spannung mit einem Voltmeter

4. Was messen „Voltmeter“?

Romers Antwort ist einfach und lehrreich:

A little thought convinces one that the voltmeter reading (call it V^4) is equal to the line integral of \vec{E} , $\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$, where the path of integration passes through the meter, beginning at the red (or "+") lead and ending at the black (or "-") lead.

Da sie aber anscheinend wenig bekannt ist, lohnt es sich, den Gedankengang kurz zu wiederholen und zu ergänzen:

Ein dynamisches Voltmeter ist ein gemäß $U = R_i I$ umgeichtetes Amperemeter, ein statisches Voltmeter ist ein Kraftmesser, und die Ablenkung des Elektronenstrahls in einem Oszilloskop wird durch die elektrische Feldstärke zwischen seinen Ablenkplatten erzeugt. In allen drei Fällen ist die Anzeige ein Maß für die Feldstärke im Innern des Messgerätes — und damit auch für das Linienintegral durch sein Inneres. Nun mag es zunächst unbefriedigend sein, dass die Voltmeteranzeige eine Aussage über den Zustand des Voltmeters macht. Dies ist allerdings keine Besonderheit von Voltmetern: *Messgeräte zeigen grundsätzlich den eigenen Zustand an. Der Experimentator muss durch geeignete Maßnahmen dafür sorgen, dass von der Anzeigenden Messgerätes auf den Zustand des zu untersuchenden Systems geschlossen werden kann.* So zeigt z.B. die Länge des Quecksilberfadens eines Fieberthermometers die Temperatur des Quecksilbers an. Diese stimmt nur dann mit der zu messenden Körpertemperatur überein, wenn für guten thermischen Kontakt zwischen Körper und Messgerät gesorgt und so lange gewartet wurde, bis sich zwischen beiden ein thermisches Gleichgewicht eingestellt hat.

Es muss also untersucht werden, unter welchen Umständen die Voltmeteranzeige eine Aussage über die Schaltung (z.B. über die Stromstärke in einem Widerstand oder über die Feldstärke in einem Kondensator) zulässt, an die es angeschlossen wird. Wenn durch die Messmasche kein veränderliches Magnetfeld greift, ist diese Frage leicht zu beantworten (s. Abb. 4): Schreibt man die Maschenregel

⁴ Wir werden diese Größe mit U_M bezeichnen.

für den gekennzeichneten Umlaufsinn auf, ergibt sich sofort⁵:

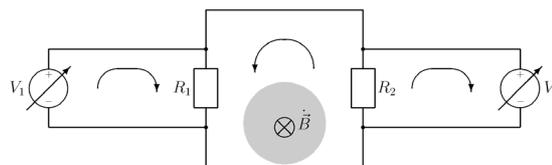


Abbildung 5: Vorzeichenanalyse des Grundversuchs: Bei der angegebenen Richtung der Magnetfeldänderung und dem durch einen Pfeil angedeuteten Umlaufsinn der inneren Masche gilt:

$\dot{\Phi} < 0, \Rightarrow I_{R1} > 0, I_{R2} > 0$. Können die Ströme durch die Voltmeter vernachlässigt werden, ist natürlich $I_{R1} = I_{R2} = I$.

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} &= \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{s} \\ &= U_M + RI = 0 \Rightarrow U_M \\ &= -RI > 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Die Anzeige des Voltmeters erlaubt also einen direkten Schluss auf die Stromstärke ($I = -\frac{U_M}{R}$) oder

auf die elektrische Feldstärke ($E = \frac{U_M}{l}$) im Widerstand.

In dem eingangs besprochenen Versuch sind die Messgeräte so angeschlossen, dass die Messkreise näherungsweise flussfrei sind. Gleichung (3) sind also lediglich die Maschengleichungen der beiden Messkreise hinzuzufügen (s. Abb. 5)⁶:

$$-U_{M1} + R_1 I = 0, \quad (16)$$

$$-U_{M2} + R_2 I = 0, \quad (17)$$

aus denen sich sofort die Beziehung zwischen den beiden Messspannungen ergibt:

$$\frac{U_{M1}}{U_{M2}} = -\frac{R_1}{R_2}. \quad (18)$$

Das Vorzeichen weist darauf hin, dass die Widerstände bezüglich der Voltmeter in entgegengesetzter Richtung, und das heißt: im Sinne eines Kreisstromes in der Leiterschleife, von elektrischem Strom durchflossen werden.

Die Beziehung (18) gilt unabhängig von der räumlichen Verteilung des Magnetfeldes innerhalb des Stromkreises und unabhängig von der Lage der Anschlusspunkte der Voltmeter zwischen den beiden Widerständen.

Greift jedoch ein zeitlich veränderliches magnetisches Feld durch die Messschleife (Abb. 6), dann gilt statt (15)

$$U_M = -RI - \dot{\Phi}_M \quad (19)$$

⁵ Weil im Widerstand \vec{j} und Umlaufsinn entgegengesetzte Richtung haben, ist $I < 0$.

⁶ s. Fußnote 1

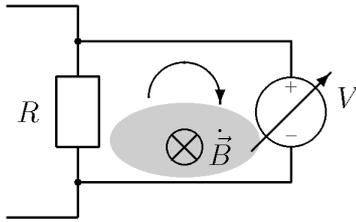


Abbildung 6: Zur Messung mit einem Voltmeter bei Anwesenheit eines sich zeitlich ändernden magnetischen Flusses

Die Anzeige des Voltmeters lässt also keinen direkten Schluss auf Feldstärke oder Stromstärke im Widerstand zu, da sie zusätzlich vom magnetischen Fluss durch die Messschleife, d.h. von der genauen Lage der Messkabel abhängt.

Wenn ein Voltmeter an eine Schaltung angeschlossen wird mit dem Ziel, eine Aussage über diese Schaltung machen zu können, ist diese Situation unbefriedigend, vielleicht vergleichbar mit dem Versuch, die Außentemperatur mit einem Thermometer zu messen, das direkter Sonnenstrahlung ausgesetzt ist: Aus der Thermometeranzeige kann nur durch komplizierte Überlegungen auf die Lufttemperatur geschlossen werden.

5. Folgerungen und Vorschläge

Die mit dem Spannungsbegriff verbundenen Vorstellungen sind eng an die Maschenregel geknüpft, die nicht mehr gültig ist, wenn Induktionseffekte eine Rolle spielen. Lernschwierigkeiten sind unvermeidlich, wenn nicht bei der Behandlung der elektromagnetischen Induktion der Spannungsbegriff explizit erweitert wird und die Vorstellungen entsprechend angepasst werden.

Es ist hier nicht der geeignete Ort, einen konkreten Unterrichts- oder Ausbildungsgang zu skizzieren. Trotzdem sollen einige Anmerkungen dazu gemacht werden:

- Nach der Behandlung der Induktionseffekte wird bei der Formulierung des Induktionsgesetzes der Spannungsbegriff (zunächst) vermieden: "In einer Leiterschleife wird ein *elektrisches Feld*, oder, näher an der experimentellen Situation, *ein elektrischer Strom* induziert, wenn
- Die Verletzung der Maschenregel in der bis dahin gültigen Form wird explizit thematisiert. Sie wird schließlich ersetzt durch bzw. erweitert zu

$$\sum U_{ij} = -\dot{\Phi} \quad \text{bzw.} \quad \sum U_i = U_Q - \dot{\Phi}.$$

Der Ausdruck $-\dot{\Phi}$ steht, wie die Quellspannung U_Q , für die Energieeinspeisung in den Stromkreis.

- Das Linienintegral über die elektrische Feldstärke ist nicht mehr unabhängig vom Integrationsweg. Es ist deshalb nicht mehr für sinnvoll,

den Potentialbegriff zu verwenden. Vielleicht ist das ein Argument dafür, ihn ganz zu vermeiden.

- Das Linienintegral über die elektrische Feldstärke bleibt jedoch sinnvoll als Ausdruck für die Energie, die *entlang eines Weges C*, z.B. also in einem Widerstand, umgesetzt wird:

$$U = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{W}{q} = \frac{P}{I} \quad (20)$$

Wir schlagen deshalb vor, die Sprechweise von der Spannung *entlang eines Widerstandes* (bzw. *in einem Widerstand*) beizubehalten. Allerdings halten wir es nicht mehr sinnvoll, vom Spannungsabfall an einem Gerät zu sprechen, da sonst die Spannung bei mehrfachem Durchlaufen einer Masche mehr und mehr abfallen würde.

- Der Schluss von der Anzeige eines Voltmeters auf die Schaltung, an die es angeschlossen ist, wird erschwert bzw. unmöglich gemacht, wenn ein sich änderndes Magnetfeld durch die Messmasche greift. Das kann zum Anlass genommen werden, den Messprozess gründlicher zu analysieren. Jedoch wird pragmatisch daraus der Schluss gezogen, einen magnetischen Fluss durch die Messmasche möglichst zu vermeiden. Das ist am einfachsten dadurch zu erreichen, dass die Kabel so geführt werden, dass durch den Messkreis keine Fläche aufgespannt wird. *Bei so geführten Kabeln ist immer klar, entlang welchen Weges die Spannung gemessen wird.*
- Gleichungen (11) und (12) machen keinerlei Aussage darüber, wie das durch Induktion hervorgerufene elektrische Feld entlang einer geschlossenen Kurve verteilt ist⁷: *Der Induktionsterm $\dot{\Phi}$ ist eine Eigenschaft der gesamten Schleife.* Nur in völlig symmetrischen Situationen (z.B. ein zylindrischer Eisenkern in homogener Umgebung) ist auch das erzeugte elektrische Feld symmetrisch. Sowie die Symmetrie gebrochen wird, z.B. durch Einbringen eines Stromkreises, ist die elektrische Feldstärke ungleichmäßig verteilt. In einem Stromkreis aus Widerstand und ideal leitendem Kabel zum Beispiel ist die elektrische Feldstärke nur in dem Widerstand von null verschieden. Es ist zweifelhaft, ob es sinnvoll oder hilfreich ist, sich dieses (Gesamt-) Feld *vorzustellen* als Überlagerung eines „einwirkenden“ Feldes und eines durch Ladungsverschiebung entstehenden Quellenfeldes.

⁷ Das gilt auch für die differentielle Form der 2. Maxwell'schen Gleichung ($\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$), die nur eine Aussage über die räumliche Veränderung des elektrischen Feldes, nicht aber über das Feld selbst, macht.

Es ist deshalb i.A. nicht sinnvoll, den Induktionsterm innerhalb des Stromkreises an bestimmten Stellen zu lokalisieren⁸. Aussagen über die räumliche Verteilung von $\dot{\Phi}$ werden deshalb nicht gemacht. Sie sind auch uninteressant, da das Verhalten des Stromkreises und die Anzeigen der Voltmeter (bei geeigneter Kabelführung) unabhängig von der räumlichen Verteilung des Magnetfeldes innerhalb einer Schleife sind.

Wenn man diese Grundsätze beachtet, ist die Analyse des Eingangsexperimentes einfach: Wenn die Messkabel geeignet geführt werden, erlauben die Anzeigen der Voltmeter Aussagen über die Stromstärke/den Energieumsatz in ganz bestimmten Widerständen des Stromkreises. Das Messergebnis

$$U_{M1} + U_{M2} > 0$$

entspricht dann der erweiterten Maschenregel und macht es möglich, $\dot{\Phi}$ zu messen.

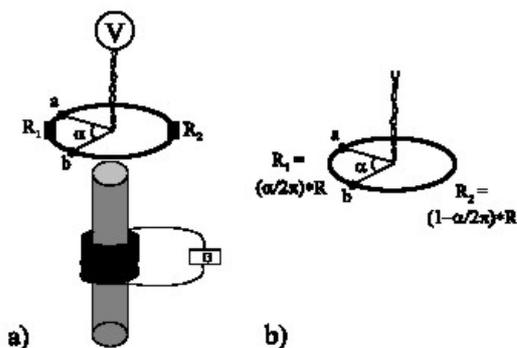


Abbildung 7: Zweites Experiment aus [8]

6. Weitere Experimente und ihre Deutung

Pelster und Hüttl ([8]) beschreiben weitere Experimente, die sie mit dem Ziel durchgeführt haben, Aussagen über die Verteilung der EMK innerhalb der Leiterschleife und in den Messleitungen machen zu können. Diese Experimente sind im Sinne der hier beschriebenen Vorschläge insofern nicht sinnvoll, als der Messkreis nicht frei von magnetischem Fluss ist. Änderungen der Anzeige des Voltmeters beruhen deshalb wesentlich darauf, dass die Messleitungen bewegt werden, nicht aber auf Veränderungen innerhalb des zu untersuchenden Stromkreises. Trotzdem wollen wir demonstrieren, dass sich die beschriebenen Beobachtungen leicht erklären lassen, ohne über die EMK und ihre Verteilung entlang der Leitungen Aussagen zu machen.

Im zweiten Experiment (Abb. 7) werden die Messleitungen radial der Leiterschleife zugeführt, die in Version a) mit zwei Widerständen bestückt ist und

⁸ Aus diesem Grund ist es auch zweifelhaft, ob es sinnvoll ist, den Induktionsterm als induzierte Spannung U_{ind} oder als EMK zu bezeichnen ([1], [6]).

in Version b) aus einem homogenen Widerstandsdraht besteht. Die von den Autoren nach länglicher Argumentation und Rechnung abgeleitete lineare Abhängigkeit der Messspannung vom Winkel α ist u.E. leicht zu sehen: Die Voltmeteranzeige ist nach (19) eine Überlagerung aus der Spannung entlang des abgegriffenen Teils des Stromkreises und der Änderung des magnetischen Flusses in der Messschleife. Der erste Term ist konstant, solange keiner der Abgriffspunkte einen Widerstand überspringt. Der andere Term ist bei der vorausgesetzten Symmetrie proportional zur aufgespannten Fläche — und damit zu α . Da die beiden Summanden entgegengesetzten Vorzeichen haben, können sie sich bei geeigneter Stellung kompensieren. Auch das quantitative Ergebnis ist leicht anzugeben: Da es sich um denselben Stromkreis handelt wie bei dem Eingangsexperiment, hängen Flussänderung und Stromstärke gemäß (3) zusammen. Aus (19) wird also sofort:

$$U_M = -R_1 I + (R_1 + R_2) I \frac{\alpha}{2\pi} \quad (21)$$

Beim homogenen Widerstandsdraht der Version b) ist R_1 proportional zur abgegriffenen Länge und damit zu α . Damit sind beide Beiträge proportional zu α , also auch die Messspannung U_M .

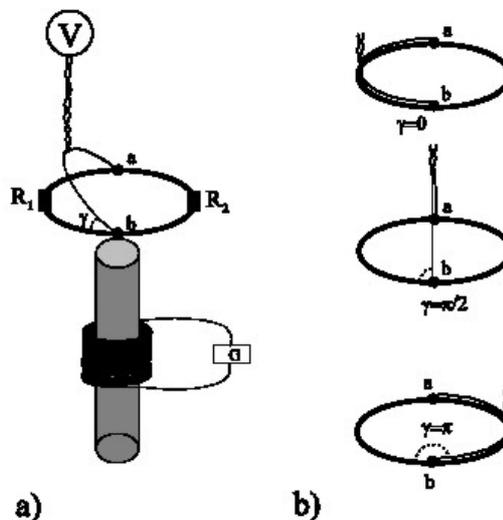


Abbildung 8: Drittes Experiment aus [8]

Die EMK kommt in dieser Argumentation nicht vor. Es muss weder über „einwirkendes Feld“ und durch Ladungsverschiebung entstehendes Gesamtfeld spekuliert, noch muss der zweifelhafte Begriff der Potentialdifferenz verwendet werden. Über das Magnetfeld außerhalb des Stromkreises müssen, anders als in ([8]), keine Annahmen gemacht werden.

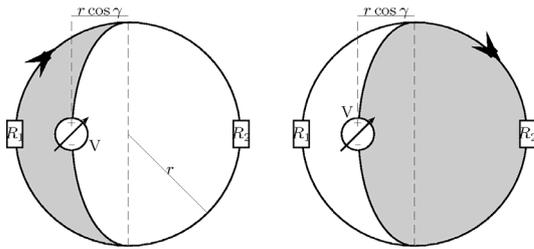
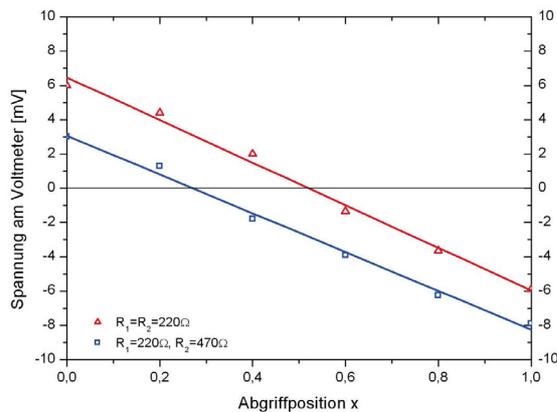


Abbildung 9: Die Messschleife umfasst, je nachdem ob man die Schaltung als Messung an R_1 (links) oder an R_2 (rechts) interpretiert, unterschiedliche Teile des gesamten magnetischen Flusses. Natürlich ergibt sich in beiden Fällen derselbe Messwert!

Auch im dritten Experiment (Abb. 8) lässt sich die Änderung der Messspannung allein darauf zurückführen, dass sich durch Bewegung der Messkabel der magnetische Fluss durch die Messschleife ändert. Das quantitative Ergebnis ist in dieser Betrachtungsweise wieder leicht abzuleiten (s. Abb. 9): Wenn man das Voltmeter als an R_1 angeschlossenes Messgerät auffasst⁹ wird von dem Messkreis die in Abb. 9 links hervorgehobene Fläche aufgespannt. Für den zugehörigen magnetischen Fluss gilt also:

$$\dot{\Phi}_{M1} = \frac{\dot{\Phi}}{2} - \frac{\dot{\Phi}}{2} \cos \gamma = \frac{\dot{\Phi}}{2} (1 - \cos \gamma) \quad (22)$$



⁹ Auch wenn man das Voltmeter als Messgerät betrachtet, das an R_2 angeschlossen ist, ergibt sich dieselbe Messspannung: In diesem Fall umfasst die Messschleife die in Abbildung 9 rechts hervorgehobene Fläche. Die Messspannung ist also

$$\begin{aligned} -U_{M2} &= -R_2 I - \dot{\Phi}_{M2} = -R_2 I - \frac{\dot{\Phi}}{2} (1 + \cos \gamma) \\ &= -R_2 I + \frac{1}{2} (R_2 + R_1) (1 + \cos \gamma) \\ &= -\frac{1}{2} [(R_2 - R_1) - (R_2 + R_1) \cos \gamma] \stackrel{(23)}{=} -U_{M1} \end{aligned}$$

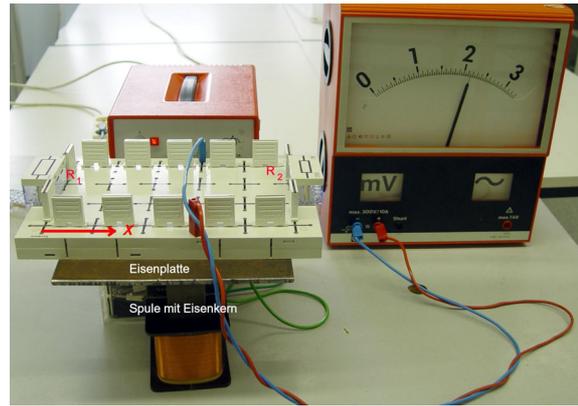


Abbildung 10: Experimentalaufbau mit Eisenplatte, zugehörige Messergebnisse

Dabei ist $\dot{\Phi} = -(R_1 + R_2)I$ die Flussänderung durch den gesamten Schaltkreis. Damit ergibt sich für die Messspannung

$$\begin{aligned} U_{M1} &= -R_1 I - \dot{\Phi}_{M1} \\ &= \frac{I}{2} [(R_2 - R_1) - (R_2 + R_1) \cos \gamma] \quad (23) \end{aligned}$$

Um statt der kosinusförmigen Abhängigkeit der Messspannung vom Winkel γ einen linearen Verlauf zu erhalten, haben wir den Versuch mit Lehrmaterial nachgebaut und ein homogenes Magnetfeld innerhalb der Schleife dadurch erzeugt, dass wir die Leiterplatte auf eine ausreichend große Eisenplatte aufgesetzt haben (Abb. 10, links). Den magnetischen Fluss innerhalb der Messschleife haben wir dadurch verändert, dass wir die Position x der Anschlusspunkte geändert haben. Die Messergebnisse (Abb. 10, rechts) bestätigen die lineare Abhängigkeit von x . Die daraus abgeleitete Feldstärke¹⁰ B des magnetischen Feldes stimmt gut mit dem Wert überein, der mit einer Hallsonde gemessen wird.

7. Schlussbemerkungen

Das hier diskutierte Problem des Spannungsbegriffs bei Gegenwart elektromagnetischer Induktion ist bereits vielfältig in der Literatur diskutiert worden (z.B. [7], [9], [6], [5], [1], [10], [2], S. 169). Leider hat sich immer noch keine einheitliche Haltung gegenüber diesem Problem durchgesetzt. Im Gegenteil: Die Autoren widersprechen sich z.T. gegenseitig direkt. Diese sehr unbefriedigende Situation macht zumindest eines deutlich: Wenn im Zusammenhang mit Induktion Begriffe wie *Spannung*, *Potentialdifferenz*, *EMK*, *treibendes Feld* usw. verwendet werden, muss explizit gesagt werden, was unter diesen Ausdrücken verstanden wird. Auch

¹⁰ Wie man sich leicht überlegt, gilt in diesem Fall $U_M = R_1 I - x \dot{\Phi}$. Die Steigung der Geraden ist also gleich der Änderung des magnetischen Flusses. Bei bekannter Fläche des Stromkreises und bekannter (harmonischer) Zeitabhängigkeit lässt sich daraus B berechnen.

sollte deutlich zwischen *experimentellen Fakten* („Das Voltmeter zeigt 0 V an.“) und ihrer *Interpretation* („Anfangs- und Endpunkt eines Drahtstücks befinden sich auf demselben Potential.“) unterschieden werden.

Wir hoffen deutlich gemacht zu haben, dass die Schwierigkeiten bei der Anwendung des Spannungsbegriffs auf Phänomene, bei denen elektromagnetische Induktion eine Rolle spielt, wesentlich dadurch hervorgerufen werden, dass der damit einhergehende Bedeutungswandel nicht explizit gemacht wird: Da die Maschenregel nicht mehr in der ursprünglichen Form (Gleichungen 5 bzw. (6) gilt, sondern durch das Induktionsgesetz in der Form (14) ersetzt werden muss, ist die Spannung zwischen zwei Punkten nicht mehr eindeutig.

Wir schlagen vor, unter der Spannung auch in Gegenwart elektromagnetischer Wechselfelder das Linienintegral über die elektrische (Gesamt-) Feldstärke zu verstehen und zu betonen, dass diese Definition nur eindeutig ist, wenn zusätzlich zu Anfangs- und Endpunkt auch der verbindende Weg festgelegt wird. *Die Spannung U_{12} ist dann entlang eines (bestimmten) Weges von 1 nach 2 zu bestimmen. Sie ist ein Maß für die bei Ladungstransport entlang dieses Weges (potentiell) umgesetzte Energie.*

Die Werte des so geänderten Spannungsbegriffs können mit Voltmetern direkt gemessen werden, wenn darauf geachtet wird, dass durch den Messkreis kein magnetischer Fluss greift. Das erreicht man am sichersten dadurch, dass man die Messkabel so führt, dass der Messkreis keine Fläche aufspannt. Um Messergebnisse zu interpretieren bzw. vorherzusagen, ist es nicht erforderlich, den Induktionsterm $\dot{\Phi}$ zu lokalisieren, d.h. bestimmten Abschnitten des Messkreises zuzuordnen. Im Gegenteil: Der Versuch, eine bestimmte Verteilung von $\dot{\Phi}$ plausibel zu machen, macht sonst selbstverständliche Erfahrungen fragwürdig¹¹, veranlasst zur Durchführung überflüssiger Experimente¹² und führt zu schwer verständlichen Aussagen¹³ (siehe auch [11]). Wir halten die Formulierung, die Messspannung sei die „Potentialdifferenz zwischen den Volt-

¹¹ z.B. die Unabhängigkeit der Messspannung von der genauen Lage der Abgriffpunkte im einführenden Experiment.

¹² z.B. ändert sich in beiden Experimenten der Abbildungen 7 und 8 die Messspannung nur dadurch, dass der magnetische Fluss durch die Messschleife geändert wird.

¹³ Z.B.: (In einem Ring aus homogenem Widerstandsdraht, in dem ein Strom induziert wird,) "befinden sich alle Punkte auf dem gleichen Potential, d.h. in jedem Teilstück des Ringes heben sich induzierte Teil - EMK und strombedingter Spannungsabfall gerade auf.“ ([8])

metereingängen c und d “, die „die Summe aller induzierten EMK und Spannungsabfälle entlang eines Weges von c nach d “ sei, für nicht geeignet, Lernschwierigkeiten zu vermeiden.

8. Anhang: Die Vorzeichen von Stromstärke, Spannung und Voltmeteranzeige

Um über die hier diskutierten Sachverhalte in unmissverständlicher Weise sprechen zu können, z.B. über das Vorzeichen der Stromstärke in der Leiter schleife oder über das Vorzeichen der von den Voltmetern angezeigten Spannungswerte, ist es erforderlich, eindeutige Regelungen zu treffen und diese auch durchzuhalten ([10]):

- Unter der **Spannung** U_{ab} zwischen zwei Punkten a und b entlang eines konkreten Weges verstehen wir das Linienintegral über die elektrische Feldstärke. Dabei ist entlang des Weges von a nach b zu integrieren:

$$U_{ab} = U_{a \rightarrow b} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (24)$$

Es muss also, neben dem Integrationsweg, auch die Reihenfolge der Punkte eindeutig gekennzeichnet werden.

- Unter der **Messspannung** U_M eines Voltmeters verstehen wir den Ausdruck

$$U_M = \int_{+}^{-} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (25)$$

Dabei verläuft der Integrationsweg vom mit „+“ gekennzeichneten Eingang durch das Innere des Messgerätes zum mit „-“ gekennzeichneten Eingang. Aufgrund dieser Definition ist U_M genau dann positiv, wenn das Gerät einen positiven Messwert („Ausschlag nach rechts“) anzeigt.

Wenn ein Voltmeter an zwei Punkte einer Schaltung angeschlossen wird, stimmen also U_{ab} und U_M genau dann im Vorzeichen überein, wenn der „+“-Eingang des Messgerätes mit a verbunden ist.

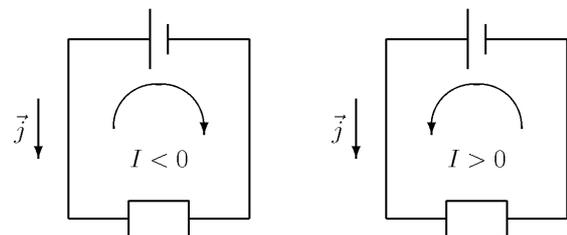


Abbildung 11: Zusammenhang zwischen Umlaufsinn einer Masche und Vorzeichen der elektrischen Stromstärke: Links sind Stromdichte und Flächen normale entgegengesetzt gerichtet, die Stromstärke ist deshalb negativ. Entsprechend ist rechts die Stromstärke positiv.

- Die Richtung des **Stromdichtevektors** \vec{j} ist durch die Festlegung des Vorzeichens der elektrischen Ladung und durch die Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (26)$$

eindeutig bestimmt ([2], S. 145ff): \vec{j} zeigt aus Gebieten abnehmender elektrischer Ladung heraus. Daraus ergibt sich, dass in Gleichstromkreisen außerhalb der Quelle die Stromdichte vom Pluspol zum Minuspol der Quelle gerichtet ist¹⁴. Es gibt in dieser Hinsicht keinen Unterschied zwischen technischer und physikalischer „Stromrichtung“

- Die **elektrische Stromstärke** I durch eine Fläche ist definiert durch

$$I = \int_a \vec{j} \cdot d\vec{a}. \quad (27)$$

Sie ist ein Skalar, hat also keine Richtung, kann aber unterschiedliche Vorzeichen annehmen. Das Vorzeichen der elektrischen Stromstärke ist erst definiert, wenn die Richtung der Flächennormalen festgelegt ist. Dazu wird in den Maschen eines Schaltnetzes ein Umlaufsinn, bzw. jedem Stromzweig ein „Zählpfeil“ zugeordnet (s. Abb. 11).

Mit den so getroffenen Vereinbarungen lässt sich der Zusammenhang zwischen Stromstärke und Spannung vorzeichenrichtig in der üblichen Form $U = RI$ schreiben, wenn sich beide Größen auf denselben Zählpfeil beziehen.

Literatur

- [1] F. Bauer, *Spannung und EMK (elektromotorische Kraft). Zwei notwendige, unterschiedliche Begriffe.*, Praxis der Naturwissenschaften/Physik 42/4, 28 (1993)
- [2] F. Herrmann, *Altlasten der Physik*, Aulis: Köln 2002
- [3] I. Hüttl, R. Pelster, *Wie „eigensinnig“ können Voltmeter sein?*, MNU 57/8, 474 (2004)
- [4] Jackson: *Klassische Elektrodynamik*, de Gruyter: 2002
- [5] W. Jung, *Anmerkungen zur Spannungsmessung am Ringstrom.*, Physik und Didaktik 17/4, 331 (1989)
- [6] U. Manthei, P. Täubert, *Zur Induktionsspannung. Eine krit. Betrachtung.*, Praxis der Naturwissenschaften. Physik, 35/6, 24 (1986)
- [7] D. R. Moorcroft: *Faraday's Law - Demonstration of a Teaser*, AmJPhys37, 221 (1969)
- [8] R. Pelster, I. Hüttl: *Verblüffende Spannungsmessungen: Experimente zu einem elektrodynamischen Paradoxon*, PhyDid 1/3 (2004), 30
- [9] R. H. Romer: *What do „voltmeter“'s measure? Faraday's law in a multiply connected region*, AmJPjys 50/12, 1089 (1982)
- [10] H. Schwarze, *Vorzeichen im Stromkreis*, Praxis der Naturwissenschaften/Physik 46/1, 8 (1997)
- [11] H. Schwarze, *Induktionsspannung und Induktionsstrom*, Praxis der Naturwissenschaften/Physik 53/5, 14 (2004)

¹⁴ Es gibt in dieser Hinsicht keinen Unterschied zwischen technischer und physikalischer „Stromrichtung“.