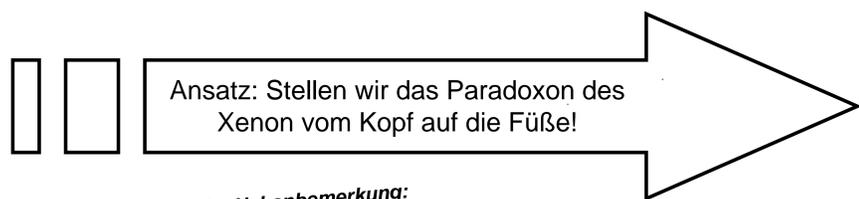


Eine Reise in die Unendlichkeit und über die Unendlichkeit hinaus

Martin Erik Horn, Email: m.horn@physik.uni-frankfurt.de



Reisen in die Unendlichkeit unternehmen wir täglich.
Wir unternehmen sogar Reisen über die Unendlichkeit hinaus.



Erkenntnistheoretische Nebenbemerkung:

»Any belief like that about the nature of things that are arbitrarily far away has turned out to be false in physics. So I think it is false in mathematics too.«
John H. Conway (1999) in *Candid Science V*

- ⇒ Basiert die Physik auf der Mathematik?
- ⇒ Oder basiert die Mathematik auf der Physik?
- ⇒ In welche Richtung verlaufen die Wirkungslinien dieser beiden Wissenschaften?

»... jener Weltanschauung verpflichtet, nach der Mathematik aus experimenteller Beobachtung hervor geht und nicht umgekehrt.«
Robert B. Laughlin, Physik-Nobelpreisträger 1998

Xenon argumentiert mathematisch: Achilles erreicht die Schildkröte nie, da er unendlich viele Schritte zurücklegen müsste, was er nicht kann.

Drehen wir also die Argumentation um und argumentieren physikalisch: Wir beobachten, dass Achilles die Schildkröte einholt. Also hat er unendlich viele Schritte zurück gelegt.

Wir beobachten sogar, dass er die Schildkröte überholt. Also hat er mehr als nur unendlich viele Schritte zurück gelegt.



Xenon: Achilles und die Schildkröte



Speziell-relativistisches Gedankenexperiment im Sinne von Xenon: Ein immer schneller beschleunigendes Raumschiff

Die Geschwindigkeit des Raumschiffs, die die auf der Erde zurück bleibenden Beobachter messen, erreicht nie die Lichtgeschwindigkeit.

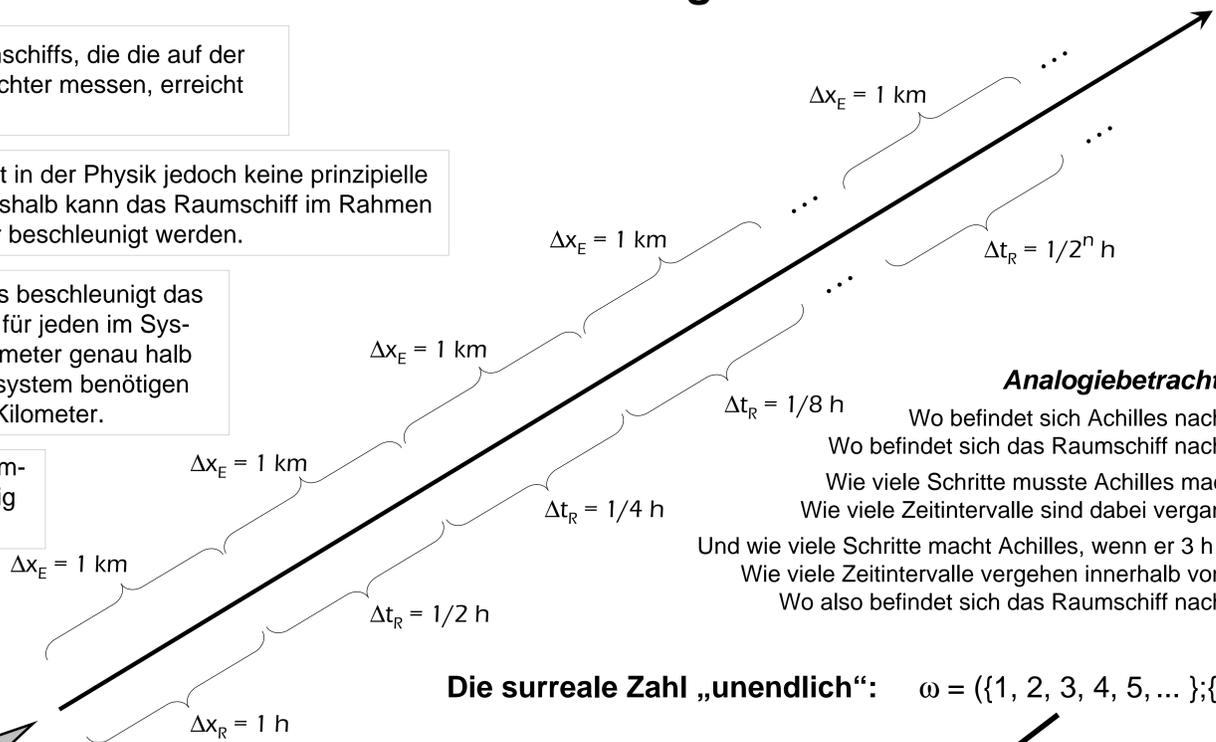
Für Beschleunigungen ist in der Physik jedoch keine prinzipielle Obergrenze bekannt. Deshalb kann das Raumschiff im Rahmen der SRT immer schneller beschleunigt werden.

Die Besatzung des Raumschiffs beschleunigt das Raumschiff genau so, dass sie für jeden im System der Erde gemessenen Kilometer genau halb so viel Zeit im eigenen Bezugssystem benötigen wie für den vorangegangenen Kilometer.

Ergänzung: An der Spitze des Raumschiffs befindet sich eine regelmäßig aufblinkende Signallampe.

Beobachter auf der Erde messen die vom Raumschiff jeweils zurück gelegten Strecken von:

Die Raumschiffbesatzung misst im Raumschiff jeweils eine Eigenzeit von:



Analogiebetrachtung:

- Wo befindet sich Achilles nach 2 h?
- Wo befindet sich das Raumschiff nach 2 h?
- Wie viele Schritte musste Achilles machen?
- Wie viele Zeitintervalle sind dabei vergangen?
- Und wie viele Schritte macht Achilles, wenn er 3 h läuft?
- Wie viele Zeitintervalle vergehen innerhalb von 3 h?
- Wo also befindet sich das Raumschiff nach 3 h?

Die surreale Zahl „unendlich“: $\omega = (\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}; \{ \})$

Eine „unendlich“ lange Strecke:
 $x = \omega \text{ km} = (\{1 \text{ km}, 2 \text{ km}, 3 \text{ km}, 4 \text{ km}, 5 \text{ km}, \dots\}; \{ \})$

Eine Strecke, die „2 • unendlich“ lang ist:
 $x = 2\omega \text{ km} = (\{(\omega+1)\text{km}, (\omega+2)\text{km}, (\omega+3)\text{km}, (\omega+4)\text{km}, (\omega+5)\text{km}, \dots\}; \{ \})$

Eine Strecke, die „unendlich²“ lang ist:
 $x = \omega^2 \text{ km} = (\{\omega \text{ km}, 2\omega \text{ km}, 3\omega \text{ km}, 4\omega \text{ km}, 5\omega \text{ km}, \dots\}; \{ \})$

Erste Schritte einer Annäherung an die Surrealen Zahlen!

Um Diskussionsanlässe zur Erörterung der Surrealen Zahlen zu schaffen, werden diese zur Modellierung physikalischer Situationen herangezogen.

Letzter Gedankenschritt:

Wo befindet sich das Licht nach 2 h bzw. 3 h, das von der Spitze des Raumschiffs ausgesandt wird?

»Surreal numbers are an invention of the great John Conway. They will go down in history as one of the great inventions of the century. (...) Thanks to Conway's discovery, we have a new concept of number.«

Gian-Carlo Rota: *Indiscrete Thoughts* (1997)